উচ্চ মাধ্যমিক

গণিত

প্রথম খণ্ড

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

মাইতি ও ঘোষ

Written according to the Revised Syllabi of plus two courses (Classes XI and XII) in Mathematics of the West Bengal Council of Higher Secondary Education.

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

প্রথম খণ্ড

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

গণিতের পাঠ্যপুস্তকসমূহ

+2 পাঠক্রমের জন্য

বাংলা ভাষায়

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত : প্রথম খণ্ড—মাইতি ও ঘোষ

১ম ভাগ : বীজগণিত

২য় ভাগ : সমতল ত্রিকোণমিতি

৩য় ভাগ : দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত : দ্বিতীয় খণ্ড—মাইতি ও ঘোষ

১ম ভাগ : প্রাথমিক কলনবিদ্যা

২য় ভাগ : বলবিদ্যা

ইংরাজী ভাষায়

HIGHER SECONDARY MATHEMATICS : Vol. ONE
—Maity & Ghosh

Part 1 : ALGEBRA
Part 2 : PLANE TRIGONOMETRY
Part 3 : ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS

HIGHER SECONDARY MATHEMATICS : Vol. TWO
—Maity & Ghosh

Part 1 : ELEMENTS OF CALCULUS
[Containing Elements of Differential Calculus **Integral** Calculus and Differential Equation]
Part 2 : ELEMENTS OF MECHANICS.

স্নাতক শ্রেণীর জন্য

DIFFERENTIAL CALCULUS (An Introduction to Analysis)
—Maity & Ghosh

INTEGRAL CALCULUS (An Introduction to Analysis)
—Maity & Ghosh

AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS
—Ghosh & Bagchi

A FIRST COURSE IN VECTOR ANALYSIS
—Maity & Ghosh

DIFFERENTIAL CALCULUS for Pass Course
—Maity & Ghosh

INTEGRAL CALCULUS including an introduction to DIFFERENTIAL EQUATIONS for Pass Course
—Maity & Bagchi

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

প্রথম খণ্ড

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

অধ্যাপক কান্তীশ চন্দ্র মাইতি

কলিকাতা আশুতোষ কলেজের গণিত বিভাগের প্রধান অধ্যাপক

এবং

অধ্যাপক রামকৃষ্ণ ঘোষ

কলিকাতা সেণ্ট্ জেভিয়ার্স কলেজের গণিত বিভাগের প্রবীণ অধ্যাপক

এবং বিজ্ঞান বিভাগের ডীন

এবং

কল্যাণী বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত শাস্ত্রের পার্টটাইম লেকচারার

এবং ঘানা কেপকোষ্ট বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত শাস্ত্রের প্রাক্তন

প্রবীণ লেকচারার

নিউ সেন্ট্রাল বুক এজেন্সী

৮/১, চিন্তামণি দাস লেন : কলিকাতা-৭০০০০৯

(এই পুস্তক ভারত সরকার কর্তৃক প্রদত্ত সুলভ দামের কাগজে মুদ্রিত ।)

প্রকাশক
শ্রীযোগেন্দ্র নাথ সেন
নিউ সেণ্ট্রাল বুক এজেন্সী
৮।১ চিন্তামণি দাস লেন
কলিকাতা ৭০০ ০০৯

মুদ্রাকর
শ্রীযামিনীভূষণ উকিল
দি মুকুল প্রিণ্টিং ওয়ার্কস
২০৯এ বিধান সরণি
কলিকাতা ৭০০ ০০৬

দাম ৮·০০ টাকা

ভূমিকা

ওয়েষ্ট বেঙ্গল কাউন্সিল অব্ হায়ার সেকেণ্ডারী এডুকেশন (West Bengal Council of Higher Secondary Education) একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য গণিতের যে পাঠক্রম নির্দিষ্ট করিয়া দিয়াছেন, সেই পাঠক্রম সম্পূর্ণরূপে অনুসরণ করিয়া বর্তমান পুস্তক প্রণয়ন করা হইয়াছে।

বর্তমানে গণিত শিক্ষার প্রয়োজন সর্বজনবিদিত। বিজ্ঞানের যে কোনও শাখায় অগ্রগতির জন্য, ইঞ্জিনিয়ারিং, বৃত্তিমূলক ও কারিগরী শিক্ষার ক্ষেত্রে, বাণিজ্যিক বিষয়ে জ্ঞানলাভের জন্য এমন কি কলাবিদ্যা আয়ত্ত করিবার জন্যও গণিত শিক্ষার প্রয়োজন। শুধু তাহাই নহে, আধুনিক যুগে দৈনন্দিন প্রতিটি কার্যে গণিতের প্রয়োজন বিশেষভাবে অনুভূত হইতেছে। এদিকে শিক্ষার মান দিন দিন উন্নত হইতেছে, মানুষের অনুসন্ধিৎসা এবং অধিকতর জ্ঞানলাভের আকাঙ্ক্ষা বৃদ্ধি পাইতেছে। সুতরাং স্কুলে কলেজে উচ্চতর মানের পুস্তকের প্রয়োজন দেখা দিয়াছে। কাউন্সিল নির্দিষ্ট পাঠক্রম স্বীকার করিয়া লইয়াই বর্তমান পুস্তককে উচ্চতর মানের অংকশাস্ত্র অধ্যয়নের সোপান হিসাবে ব্যবহার করা হইয়াছে। উচ্চতর গণিত শিক্ষার জন্য প্রয়োজন—যথাযথভাবে যুক্তিতর্কের দ্বারা বিষয়বস্তুর অবতারণা ও সমাধান। আবার মাধ্যমিক পর্যায়ে ব্যবহারিক নিপুণতারও প্রয়োজন। এই দুই উদ্দেশ্যে এই পুস্তকের প্রণয়ন। গাণিতিক অভিব্যক্তির যথাযথ সূত্র উপস্থাপন করিয়া প্রতিপাদ্য বস্তুর প্রমাণ সুস্পষ্টরূপে নির্দিষ্ট করা হইয়াছে। সমাধানসম্বলিত উদাহরণগুলি অতি সতর্কতার সহিত মনোনয়ন করা হইয়াছে—বহুক্ষেত্রে একটিমাত্র উদাহরণের সাহায্যে সমজাতীয় উদাহরণ তো বটেই, আরও ব্যাপক, বিস্তৃত ও জটিল প্রশ্ন সমাধান করা হইয়াছে—ইহা ছাত্রছাত্রীদের উদ্বুদ্ধ করিবে। পুস্তকের বিষয়বস্তুর আলোচনা পর পর সুশৃঙ্খলভাবে অগ্রসর হইয়াছে। প্রতিটি উপপাদ্য, প্রতিপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্ত অত্যন্ত সতর্কতার সহিত উপস্থাপিত করা হইয়াছে, তাহাদের নিয়ন্ত্রণের সীমানা আলোচিত হইয়াছে এবং যেখানেই প্রয়োজন তাহাদের প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। শুধু তাহাই নহে—প্রতিটি বিবৃতির প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করাইবার চেষ্টা করা হইয়াছে। পুস্তকের প্রতিটি অংশে ছাত্রছাত্রীদের কথা সবসময় স্মরণ রাখা হইয়াছে। মন্তব্য, বিশেষ মন্তব্য, টীকা—এসবের গুরুত্ব কিন্তু উপপাদ্যের তুলনায় কোনও অংশে কম নহে। অংকশাস্ত্রে ব্যুৎপত্তি-লাভে বিশেষভাবে সহায়তা করে অধীত জ্ঞানের ব্যবহারিক প্রয়োগ। এই উদ্দেশ্যে বিশেষভাবে প্রস্তুত নানাপ্রকার অনুশীলনী ও প্রশ্ন গ্রন্থে সন্নিবেশিত করা হইয়াছে—অংকগুলি এমনভাবে সাজান হইয়াছে যে পর পর অংক কষিতে যেন কোনও অসুবিধার সৃষ্টি না হয়। ছাত্রছাত্রীদের পরীক্ষার কথা বিবেচনা করিয়া বেশ কিছু বস্তুমুখী প্রশ্ন ও পরীক্ষামূলক প্রশ্নও দেওয়া হইয়াছে।

জীবনের অধিকাংশ সময় আমরা স্কুল, কলেজ, বিশ্ববিদ্যালয় ও অন্যত্র অঙ্কশাস্ত্রের আলোচনা করিয়া আসিয়াছি এবং সেই সূত্রে আমাদের পূজ্যপাদ শিক্ষক ও অধ্যাপকগণের সহিত এবং আমাদের বন্ধুবান্ধব ও ছাত্রছাত্রীগণের সহিত এই বিষয়ের আলোচনায় অপূর্ব আনন্দ ও অনুপ্রেরণা পাইয়াছি। আমরা তাঁহাদের সকলের প্রতিই আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাইতেছি।

এই গ্রন্থ প্রণয়নে চন্দননগর কানাইলাল বিদ্যামন্দিরের দুই জন প্রবীণ শিক্ষক শ্রীনীলমণি কুমার, প্রধান শিক্ষক এবং শ্রীধীরেন্দ্র নাথ পাল, সহকারী প্রধান শিক্ষক— তাঁহাদের শিক্ষকতা জীবনের অভিজ্ঞতা দ্বারা—বিস্তৃত আলোচনা, অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতার মাধ্যমে আমাদের সর্বতোভাবে সাহায্য করিয়াছেন। তাঁহাদিগকে জানাই আমাদের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা।

সর্বশেষ কৃতজ্ঞতা জানাই আমাদের প্রিয় বন্ধুবর বিদ্যাসাগর কলেজের গণিত-বিভাগের প্রধান অধ্যাপক শ্রীপ্রতুলকুমার বাগচী মহাশয়কে, যাঁহার অনুপ্রেরণা ব্যতীত এই পুস্তক প্রণয়ন সম্ভবপর হইত না।

পাঠকমণ্ডলীর নিকট হইতে পুস্তকটির উৎকর্ষসাধনের নিমিত্ত যে কোনও প্রকার ইঙ্গিত সাদরে অভিনন্দিত হইবে।

ভ্রাতৃদ্বিতীয়া
৭ই কার্তিক, ১৩৮৩ বঙ্গাব্দ
কলিকাতা

মাইতি ও ঘোষ

Revised Syllabi of Analytical Geometry of Two Dimensions

(*West Bengal Council of Higher Secondary Education*)

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. *Analytical representation of reflexion, translation and rotation.* Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight lines ; Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

1. The following portions of the printed syllabus are *deleted for 1979, 1980.*

Analytical representation of reflextion, translation and rotation.

2. Other portions of the syllabus as printed stand as they are.

সূচীপত্র

FORMULAE AND RESULTS

1. Distance between two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. Point (x, y) dividing the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in the ratio $m : n$ is given by

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m},\ y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m},$$

where m and n have the same sign for internal division and opposite signs for external division.

3. The slope of a line (not parallel to the y-axis) $m = \tan\theta$, or $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, where θ is the inclination of the line with positive x-axis and (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are any two points of the line.

4. The angle α measured counterclockwise **from** a line L_1 of slope m_1 **to** a line L_2 of slope m_2 is given by

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Two lines are parallel if $m_1 = m_2$ and perpendicular if $m_1 . m_2 = -1$.

5. Area of a triangle joining three vertices (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) in order is

$$\tfrac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

6. Equations of a straight line are :

Point-slope form : $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Slope-intercept form : $y = mx + c$.

Intercept form : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Normal form : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

Parametric form : $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$.

General Equation : $ax + by + c = 0\ (b \neq 0)$

Slope $= -a/b$; y-intercept $= -c/b$;

$c > 0$; normal form $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$c < 0$; normal form $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7. The distance of (x_1, y_1) from the line $ax + by + c = 0$ is given by

(i) $c > 0$: $\pm \dfrac{c + ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ acc. as (x_1, y_1) is on the origin side or non-origin side of the line.

(ii) $c < 0$: $\mp \dfrac{c + ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ acc. as (x_1, y_1) is on the origin side or non-origin side of the line.

8. The Equations of bisectors of the angles between two lines $ax + by + c = 0$ and $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ are

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Acc. as c, c_1 have like or unlike signs, the positive or negative sign gives the bisector of that angle between the two lines which contains the origin.

9. (i) $ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ (k = any arbitrary constant) is the equation of any line passing through the two lines $ax + by + c = 0$, and $a_1x + b_1y + c_1 = 0$.

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ are concurrent if three constants k, l, m (not zero) exist such that

$$k(a_1x + b_1y + c_1) + l(a_2x + b_2y + c_2) + m(a_3x + b_3y + c_3)$$
$= 0$ holds identically.

10. The equation of a circle whose centre is (α, β) and radius r is $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

General equation : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Centre $(-g, -f)$; radius $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

If $c = 0$, the circle passes through the origin ;

If $f = 0$, the circle has its centre on the x-axis ;

If $g = 0$, the circle has its centre on the y-axis.

The equation of a circle on the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as diameter is

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

11. Conic sections

Focus (x_1, y_1) ; Directrix $ax + by + c = 0$; Eccentricity $= e$.

Equation is : $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 \dfrac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}$.

Standard forms (Explanations of symbols in the book)

Parabola : $y^2 = \pm 4ax$; $(y - k)^2 = \pm 4a(x - h)$.

$(a > 0)$ $x^2 = \pm 4ay$; $(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$.

Ellipse : $a^2 > b^2$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$.

$a^2 < b^2$; $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$; $\dfrac{(x - h)^2}{b^2} + \dfrac{(y - k)^2}{a^2} = 1$.

where, $b^2 = a^2 (1 - e^2)$.

Hyperbola : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (Centre origin ; focii on x-axis).

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (Centre origin ; focii on y-axis).

where, $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$.

12. Tangents

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ for $y^2 = 4ax$ at (x_1, y_1)

$\dfrac{xx_1}{a^2} \pm \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$ for $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2}$ at (x_1, y_1)

Normals : $y - y_1 = -\dfrac{y_1}{2a}(x - x_1)$ for $y^2 = 4ax$ at (x_1, y_1)

$y = mx - 2am - am^3$ at $(am^2, -2am)$

$\dfrac{a^2x}{x_1} \mp \dfrac{b^2y}{y_1} = a^2 \mp b^2$ for $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ at (x_1, y_1).

13. Parametric forms

Parabola $y^2 = 4ax$; $x = at^2$ and $y = 2at$

Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; $x = a \cos \theta$ and $y = b \sin \theta$.

Hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; $x = a \sec \theta$ and $y = b \tan \theta$.

0

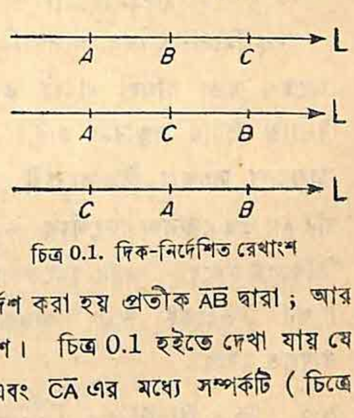
দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ ঃ অভিক্ষেপ
(DIRECTED LINE SEGMENTS : PROJECTIONS)

0·1. সূচনা

গ্রীক্‌দিগের জ্যামিতি এবং হিন্দু ও আরবদিগের বীজগণিত বিষয়ক জ্ঞানে সমৃদ্ধ হইয়া প্রসিদ্ধ ফরাসী দার্শনিক ও গণিতবিদ্ Rene' Descartes (1596-1650) জ্যামিতি অধ্যয়নে বীজগাণিতীয় পদ্ধতির প্রয়োগকৌশলের প্রবর্তন করেন। এইজন্য তিনিই হইলেন **Analytic Geometry** বা **বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির** প্রবর্তক—তাঁহার নামের ল্যাটিন রূপ, যথা : **Cartesius,** হইতে প্রাপ্ত **Cartesian Geometry** বা **কার্তেজিয় (কার্টেজীয়)** জ্যামিতি নামেও ইহা অভিহিত হয়। জ্যামিতিতে যেমন **ধনাত্মক,** সেইরূপ **ঋণাত্মক** সংখ্যার প্রয়োগ কিভাবে করা যায়, তাহাই এই অধ্যায়ে প্রথমে প্রদর্শন করা হইবে।

0·2. দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ (Directed Line-segments)

ধরা যাক্ L একটি অনির্দিষ্ট সরলরেখা। ইহার উপর A ও B দুইটি বিন্দু চিহ্নিত করা হইল। তাহা হইলে L রেখার A ও B দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশকে **রেখাংশ** AB বলা হয়। রেখাংশ AB কে A **হইতে** B **অভিমুখে** নির্দেশিত বলিয়া বিবেচনা করা হইবে। ইহাকে A হইতে B তে গমনের কার্যের সহিত তুলনা করা যাইতে পারে। লক্ষ্য করিতে হইবে যে রেখাংশ BA হইল B **হইতে** A **অভিমুখে** নির্দেশিত। A হইতে B অভিমুখে নির্দেশিত রেখাংশ AB কে নির্দেশ করা হয় প্রতীক $\overline{AB}$ দ্বারা ; আর $\overline{BA}$ হইল B হইতে A অভিমুখে নির্দেশিত রেখাংশ। চিত্র 0.1 হইতে দেখা যায় যে নির্দেশিত রেখাংশ তিনটি, যথা : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$ এর মধ্যে সম্পর্কটি (চিত্রে প্রদর্শিত তিনটি ক্ষেত্রেই) হইল



চিত্র 0.1. দিক-নির্দেশিত রেখাংশ

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \qquad \cdots \quad (1)$$

প্রকৃতপক্ষে, যে বিন্দুতে পৌঁছাইতে হইবে সেই বিন্দু সম্পর্কে বিবেচনা করিলে বলা যায় যে A হইতে B তে গমন ও পরে B হইতে C গমন, আর A হইতে C তে গমন হইল

তুল্য কার্য। কোন রেখার উপর অবস্থিত তিনের অধিক বিন্দু সম্পর্কেও অনুরূপ ফল পাওয়া যায়, যথা : L রেখার উপর A, B, C, D যদি চারিটি বিন্দু হয়, তবে

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}. \quad \cdots \quad (2)$$

সংজ্ঞা। **একই রেখা** বা **দুইটি সমান্তরাল রেখার** উপর অবস্থিত দুইটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশকে **সমান** বলা হয়, যদি তাহাদের দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং দিক্ বা অভিমুখ (direction or sense) একই হয়।

দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের বীজগাণিতীয় চিত্র বা রূপ (Algebraic Representation of Directed Line-segments)

প্রদত্ত কোন রেখা L এর উপর দুইটি বিপরীত দিকের একটিকে L এর **ধনাত্মক অভিমুখ** এবং অপরটিকে উহার **ঋণাত্মক অভিমুখ** রূপে মনোনীত করা হইল।

L এর উপর যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ AB কে তাহা হইলে **ধনাত্মক** বলা হইবে, যদি ইহার অভিমুখ ও L এর ধনাত্মক অভিমুখ একই হয় এবং উহাকে **ঋণাত্মক** বলা হইবে, যদি উহার অভিমুখ ও L এর ঋণাত্মক অভিমুখ একই হয়।

এইরূপ একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{AB}$ এর উপর একটি **সংখ্যা** (number) আরোপ করা যায়। যদি সাধারণ রেখাংশ AB এর দৈর্ঘ্য l হয়, তবে লেখা যায় যে

$\overline{AB}=l$, যদি $\overline{AB}$ ধনাত্মক রেখাংশ হয় ;

$= -l$, যদি $\overline{AB}$ ঋণাত্মক রেখাংশ হয়।

যদি $\overline{AB}=l$ হয়, তবে $\overline{BA}=-l$ এবং বিপরীতক্রমেও ইহা সত্য। আবার

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0. \quad \cdots \quad (3)$$

দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ সম্পর্কিত সমীকরণ (1), (2), (3) কে অনুরূপ সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রেও সত্য বলিয়া যাচাই করিয়া দেখা যাইতে পারে। ফলত কোনরূপ ভুল বা বিভ্রান্তি হইবার সম্ভাবনা নাই, যদি **দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ এবং উহার অনুরূপ সংখ্যা উভয়কেই** একই অঙ্কপাতন $\overline{AB}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। কিন্তু যদি $\overline{AB}$ এর **কেবল দৈর্ঘ্যের** উল্লেখের প্রয়োজন হয়, তবে $|\overline{AB}|$ বা কেবল AB লিখিলেই হইবে। এখন হইতে যখনই কোন রেখাংশের অভিমুখ এবং উহার অনুরূপ সংখ্যা উভয়কেই উল্লেখ করিবার প্রয়োজন হইবে তখনই $\overline{AB}$ এই অঙ্কপাতন ব্যবহৃত হইবে।

0·3. দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপ (Projection of a Directed Line-segment)

1. L রেখার উপর P **বিন্দুর অভিক্ষেপ** বলিতে বুঝায়, L রেখার উপর P হইতে অঙ্কিত লম্বের **পাদবিন্দু** M ; যদি P, L এর উপরেই অবস্থিত হয়, তবে L এর উপর P এর অভিক্ষেপ P নিজেই।

2. ধরা যাক্, $\overline{PQ}$ একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ এবং L যে কোন একটি রেখা (চিত্র 0.2)। যদি

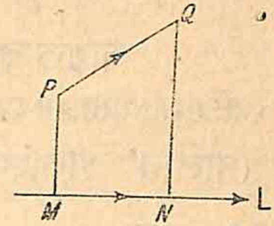
L এর উপর P এর অভিক্ষেপ = M হয়,

L এর উপর Q এর অভিক্ষেপ = N হয়,

তবে, L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = $\overline{MN}$

যদি $\overline{MN}$ এর অনুরূপ সংখ্যাটি l হয়, তবে

L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = l.



চিত্র 0.2. $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ

যেহেতু $\overline{MN} = -\overline{NM}$, সুতরাং

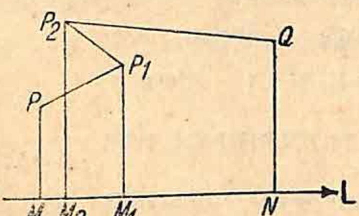
L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = −(L এর উপর $\overline{QP}$ এর অভিক্ষেপ)

যদি L এর লম্বরেখার উপর P, Q অবস্থিত হয়, তবে M, N বিন্দুদ্বয় মিলিত হয় এবং L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{MN}$ তখন শূন্য।

সিদ্ধান্ত : দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপও দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ, সুতরাং উহাকে একটি সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং ঐ সংখ্যাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে যদি অভিক্ষেপ রেখাংশ যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়।

3. ভগ্ন রেখা (broken line)-র অভিক্ষেপ

ধরা যাক্ PP_1P_2Q একটি ভগ্ন রেখা (চিত্র 0.3); L এর উপর ইহার অভিক্ষেপ বলিতে বুঝায়, $\overline{PP_1}$, $\overline{P_1P_2}$ এবং $\overline{P_2Q}$ এর L এর উপর অভিক্ষেপগুলির যোগফল ; অর্থাৎ



চিত্র 0.3. ভগ্ন-রেখার অভিক্ষেপ

L এর উপর PP_1P_2Q এর অভিক্ষেপ

$= \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2N} = \overline{MN}$

= L এর উপর PQ এর অভিক্ষেপ।

1

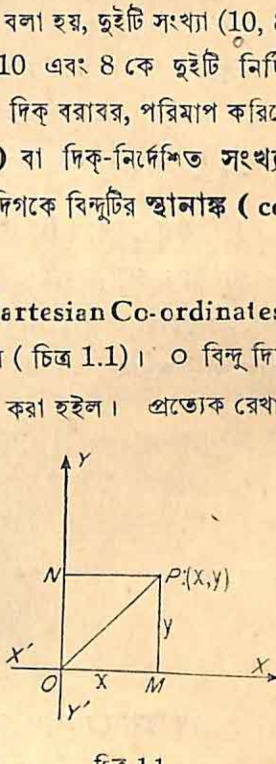
আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক
(RECTANGULAR CARTESIAN CO-ORDINATES):
'পোলার' স্থানাঙ্ক (POLAR CO-ORDINATES)

1·1. সূচনা

এই অধ্যায়ে আসল প্রশ্নটি হইল, প্রদত্ত কোন সমতলে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা। বিন্দুটি কোন সমতলে অবস্থিত হইলে **উপযুক্ত চিহ্নযুক্ত** দুইটি সংখ্যা উহার অবস্থান নির্ণয়ের পক্ষে যথেষ্ট। ধরা যাক্, কোন নগর X, অপর একটি নগর Y এর 10 কি. মি. পূর্বে এবং 8 কি. মি. দক্ষিণে অবস্থিত। এক্ষেত্রে বলা হয়, দুইটি সংখ্যা (10, 8) Y এর সম্পর্কে X এর অবস্থান নির্দেশ করিতেছে—সংখ্যা 10 এবং 8 কে দুইটি নির্দিষ্ট অভিমুখ বরাবর, যথা: Y এর যথাক্রমে পূর্ব ও দক্ষিণ দিক্ বরাবর, পরিমাপ করিতে হইবে। যখন এইভাবে একটি **নিয়ন্ত্রিত (directed)** বা দিক্-নির্দেশিত **সংখ্যা-যুগল** কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে, তখন তাহাদিগকে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক (co-ordinates)** বলা হয়।

1·2. আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates)

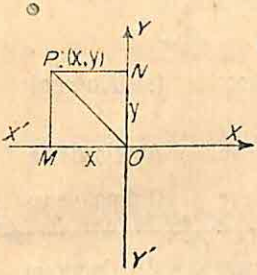
প্রদত্ত কোন সমতলে যে কোন বিন্দু O লওয়া হইল (চিত্র 1.1)। O বিন্দু দিয়া পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ অঙ্কন করা হইল। প্রত্যেক রেখার উপর **ধনাত্মক অভিমুখ** (তীরচিহ্ন দ্বারা নির্দেশিত) মনোনীত করা হইল: সাধারণত $\overleftrightarrow{X'OX}$ এর ধনাত্মক দিক ধরা হয় বাম হইতে দক্ষিণ অভিমুখে এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ এর ধনাত্মক দিক নিচ হইতে উপরের অভিমুখে। অঙ্কপাতন '↔' নির্দেশ করে যে রেখাটিকে উভয় দিকে সীমাহীনভাবে বর্ধিত করা যায়।



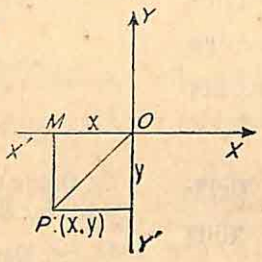
চিত্র 1.1

মনে করা হইল, সমতলটিতে P যে কোন বিন্দু। দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OP}$র সম্পর্কে বিবেচনা করা যাক্। ধরা যাক্, দিক্-নির্দেশিত রেখাদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ এর উপর $\overline{OP}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$। মনে করা যাক্, ইহাদের

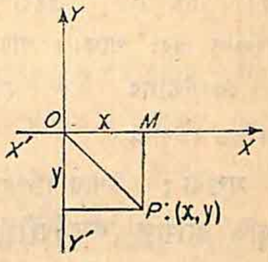
অনুরূপ সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে x এবং y. তাহা হইলে সংখ্যা-যুগল (x, y) হইবে P এর **স্থানাঙ্ক** (স্থানাঙ্কদ্বয় আয়ত (rectangular), কারণ প্রাসঙ্গিক রেখাদ্বয় (reference lines) $\overleftrightarrow{X'OX}$ ও $\overleftrightarrow{Y'OY}$ কে পরস্পর লম্বভাবে লওয়া হইয়াছে **)**। স্থানাঙ্কদ্বয়কে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়—প্রথম অঙ্ক x কে বলা হয় P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক [বা ভুজ (abscissa)] এবং দ্বিতীয় অঙ্ক y কে বলা হয় y-স্থানাঙ্ক [বা কোটি (ordinate)]। স্থানাঙ্কদ্বয়ের প্রবর্তক Rene' Descartes এর নামানুসারে ইহাদের কার্টেজীয় (Cartesian) বলা হয়। ছাত্রছাত্রীদের এই বিষয়ে দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে যে অঙ্ক-যুগল (x, y) এর হয় x অথবা y অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হইতে পারে : চিত্র 1.2, 1.3, 1.4 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 1.2. x −ve ; y +ve



চিত্র 1.3. x −ve, y −ve



চিত্র 1.4. x +ve, y −ve

O কে **মূলবিন্দু (origin)**, $\overleftrightarrow{X'OX}$ রেখাকে x-অক্ষ (x-axis) এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ রেখাকে y-অক্ষ (y-axis) বলা হয়। অক্ষ দুইটিকে **স্থানাঙ্ক অক্ষ (Co-ordinate axes)** বলা হইয়া থাকে।

স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় এবং উহাদের দিক্ একবার মনোনয়নের সঙ্গে সঙ্গে ঐ সমতলস্থ **প্রত্যেক বিন্দুর** (x, y) আকারের স্থানাঙ্ক নির্দিষ্ট হইয়া যায়।

2. **বিপরীতক্রমে**, যে কোন সংখ্যা-যুগল (x, y) এর জন্য একটি অনুরূপ বিন্দু P পাওয়া যাইবে, যাহার স্থানাঙ্ক হইবে (x, y)। x-অক্ষের উপর $\overline{OM} = x$ লইয়া এবং x-অক্ষের উপর M বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করিয়া উহার উপর $\overline{MP} = y$ লইলেই P বিন্দুটির অবস্থান নির্ণীত হইবে।

3. O এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$; x-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (x, 0)$; y-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (0, y)$।

স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়

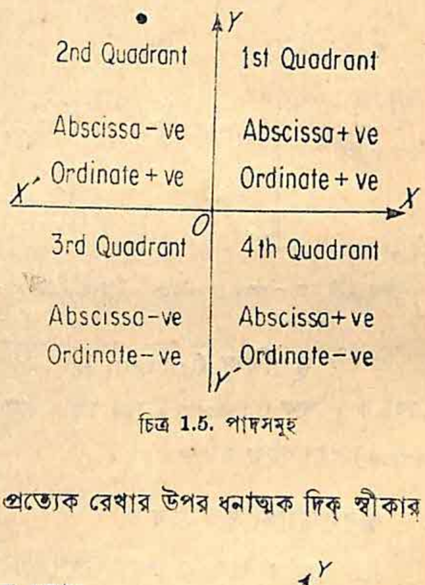
দেখা গেল যে x-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি 0 (শূন্য) এবং সমতলে এইগুলিই একমাত্র বিন্দু যাহাদের কোটি শূন্য। এই তথ্যটিকে নিম্ন প্রকার উক্তির দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যথা :

x-অক্ষকে $y=0$ এই সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়
এবং অনুরূপ যুক্তিতে, y-অক্ষকে $x=0$ এই সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়

ইহাও বলা যায় যে সমীকরণ $xy=0$ অক্ষদ্বয়কে নির্দেশ করে।

পাদসমূহ (Quadrants)

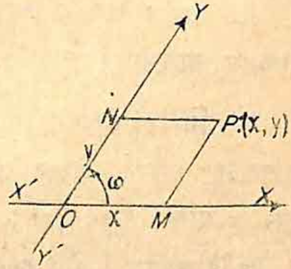
স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় সমতলটিকে চারিটি অঞ্চলে বিভক্ত করে—ইহাদের **পাদ** বলা হয়। চিত্র 1.5 দ্রষ্টব্য—উহাতে পাদগুলি এবং প্রত্যেক পাদতে ভুজ ও কোটিগুলির চিহ্ন সুস্পষ্টভাবে প্রদর্শিত হইয়াছে।



চিত্র **1.5.** পাদসমূহ

মন্তব্য : উপরে বর্ণিত স্থানাঙ্ক-পদ্ধতি **আয়ত কার্টেজীয়** স্থানাঙ্ক পদ্ধতি বলিয়া পরিচিত। কখনও কখনও অক্ষদ্বয়কে আয়তাকারে লওয়া হয় না। সেক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক পদ্ধতি হইল **তির্যক (oblique)**। দুইটি রেখা (পরস্পর লম্ব না হইতে পারে) $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ মনোনীত করা হয় এবং প্রত্যেক রেখার উপর ধনাত্মক দিক্ স্বীকার করিয়া লওয়া হয়।

ধরা যাক্ $\angle XOY=\omega$; সমতলে যে কোন বিন্দু P লওয়া হইল। অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল করিয়া PM এবং PN অঙ্কিত হইল [চিত্র 1.6 দ্রষ্টব্য]। দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OM}=x$ এবং $\overline{ON}=y$ হইল P এর তির্যক স্থানাঙ্ক। অক্ষদ্বয় এখন **তির্যক অক্ষ** বলিয়া অভিহিত হইবে।



চিত্র **1.6.** তির্যক অক্ষদ্বয়

"তির্যক অক্ষ" বর্তমান পাঠ্যক্রমের অন্তর্ভুক্ত নহে। কৌতূহলী ছাত্রছাত্রীদের জন্য কেবল মৌলিক সংজ্ঞাটি প্রদত্ত হইল। পুস্তকের

অবশিষ্ট অংশে অক্ষদ্বয়কে আয়ত বলিয়াই ধরিয়া লওয়া হইবে (যদি না কোন ক্ষেত্রে তির্যক অক্ষের পক্ষে বিশেষ কৌতূহলজনক কোন ফলের কথা স্পষ্টত উল্লিখিত হয়)।

অনুশীলনী

বর্গাঙ্কিত ছককাগজ লইয়া উহাতে আয়ত অক্ষদ্বয় স্থাপন করিয়া।

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর (1 সে. মি. কে একক লইয়া) :
$(0, 1)$; $(1, 0)$; $(2, 2)$; $(2, -2)$; $(-2, -2)$;
$(-2, 2)$; $(0, -2{\cdot}5)$; $(-1, 1)$; $(-4, 3{\cdot}2)$; $(3{\cdot}24, -{\cdot}87)$

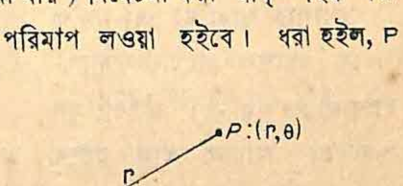
2. $(3, 2)$, $(-2, 2)$; $(-2, -1)$, $(3, -1)$—এই বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর এবং যাচাই করিয়া দেখাও যে উহারা একটি আয়তক্ষেত্র গঠন করে। উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $(1, 2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$ বিন্দুত্রয়কে শীর্ষ করিয়া একটি বর্গ গঠন সম্ভব এবং ছককাগজের সাহায্যে উহার চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

*1·3 'পোলার' স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates)

কোন সমতলে একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে অপর যে কোন একটি বিন্দুর **দূরত্ব** এবং উহার **অভিমুখ** উল্লেখ দ্বারা দ্বিতীয় বিন্দুটির অবস্থান সম্পূর্ণরূপে নির্দেশ করা সম্ভব। এই ধারণাই হইল **'পোলার' স্থানাঙ্ক পদ্ধতির** ভিত্তি।

ধরা যাক্ O হইল সমতলস্থ প্রদত্ত বিন্দু। একটি অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OA}$ (ইহার অর্থ, রেখাটিকে কেবল তীর চিহ্নের দিকে বর্ধিত করা যায়) বিবেচনা করা যাক্—স্থির করা হইল যে এই রেখা হইতে কোণগুলির পরিমাপ লওয়া হইবে। ধরা হইল, P সমতলটিতে যে কোন একটি বিন্দু। O হইতে **ইহার দূরত্ব** $|\overline{OP}|$ কে দ্বারা, এবং কোণ $\widehat{AOP}$ কে θ দ্বারা নির্দেশ করা হইল ; $\overrightarrow{OA}$ **হইতে** $\overrightarrow{OP}$ পর্যন্ত ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে θ কোণের পরিমাপ লওয়া হইয়াছে। তাহা হইলে (r, θ) হইল



চিত্র 1.7. P এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক

---

* ত্রিকোণমিতিতে মোটামুটি জ্ঞানলাভের পরই ছাত্রছাত্রীদের অনুচ্ছেদ 1·3 এবং 1·4 অধ্যয়ন করিবার পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে। অনুচ্ছেদ 1·2এর পর দ্বিতীয় অধ্যায় পাঠ তরুণ শিক্ষার্থীদের নিকট কঠিন হইবে না।

P এর পোলার স্থানাঙ্ক। O কে বলা হয় পোল (Pole) বা মূলবিন্দু ; $\overrightarrow{OA}$ কে বলা হয় **প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি** (**Initial half-ray**) ; এবং r কে রেডিয়াস-ভেক্টর (Radius vector) ও θ কে ভেক্টরিয়াল কোণ (Vectorial angle) বলা হয়।

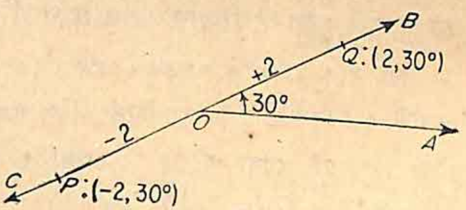
স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. r এবং θ প্রদত্ত হইলে **একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দুই** নির্ণীত হইবে।

2. অপর পক্ষে, কোন বিন্দু P প্রদত্ত হইলে r ($= |\overline{OP}|$) সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়, কিন্তু θর মান, পরস্পর $360°$ (বা 2π) এর গুণিতকের পার্থক্যসম্পন্ন অসীম সংখ্যক মানের সেটের যে কোন একটি হইতে পারে, যথা : $\{\theta, \theta+2\pi, \theta+4\pi, \theta+6\pi, \cdots \cdots\}$.

3. মূল বিন্দু O এর ক্ষেত্রে $r=0$, কিন্তু θ কে অনন্যভাবে (uniquely) নির্ণয় করা যায় না। তবে O এর পোলার স্থানাঙ্ক $=(0, 0°)$ ধরা যায়।

4. 'পোলার' স্থানাঙ্কের এইরূপ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব, যাহাতে r **ঋণাত্মক** হইতে পারে (যদিও এইরূপ সংজ্ঞা পূর্বে দেওয়া হইয়াছে যাহাতে r সর্বদা **ধনাত্মক** হয়)। এক্ষেত্রে $(-2, 30°)$ বিন্দুটি পাইতে হইলে $\overrightarrow{OA}$ এর সহিত $30°$ কোণ করিয়া অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OB}$ অঙ্কন করিতে হইবে ; পরে ইহার বিপরীত অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OC}$ এর উপর রেখাংশ $\overline{OP}$ স্থাপন করিতে হইবে, যেখানে $|\overline{OP}| = 2$ একক। তাহা হইলে P এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-2, 30°)$।



চিত্র 1.8. $P(r, -ve)$ এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক

'পোলার' স্থানাঙ্কের এই পদ্ধতি (r কে ঋণাত্মক লইয়া) সাধারণভাবে স্বীকৃত হয় না। সুতরাং মূল সংজ্ঞাতেই অবিচল থাকা হইবে এবং r এর ঋণাত্মক মান পরিহার করিয়া চলা হইবে, যদি না কোথাও ইহার বিপরীত সুস্পষ্ট কোন বিবৃতি প্রদত্ত হয়।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর :

$(1, 0°)$, $(5, -30°)$, $(3, 180°)$, $(0, 45°)$,
$(2, 200°)$, $(4, \frac{1}{2}\pi)$, $(5, 30°)$, $(2, -90°)$
$(6, \frac{2}{3}\pi)$.

2. যে বর্গের কেন্দ্র O তে অবস্থিত, একটি বাহু প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মির উপর লম্ব এবং উহার দৈর্ঘ্য $2a$, তাহার শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

[উঃ $(\pm\sqrt{2}a, \pi/4), (\pm\sqrt{2}a, 3\pi/4)$]

3. সেই সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক কি হইবে, যাহার কেন্দ্রে 'পোল' এবং একটি শীর্ষ OA এর উপর অবস্থিত ? [উঃ $(a/\sqrt{3}, 0), (a/\sqrt{3}, 2\pi/3), (a/\sqrt{3}, 4\pi/3)$]

4. যাচাই করিয়া দেখ যে বিভিন্ন 'পোলার' স্থানাঙ্ক-যুগল, যেমন (r, θ), $(-r, \theta+\pi)$, $(r, \theta+2\pi)$ হইতে একই বিন্দু পাওয়া যাইতে পারে।

*1·4. কার্টেজীয় এবং পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ

["কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক" শব্দটি সর্বদা "আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক" কে বুঝাইবে, যদি না অন্যরূপ বলা থাকে।]

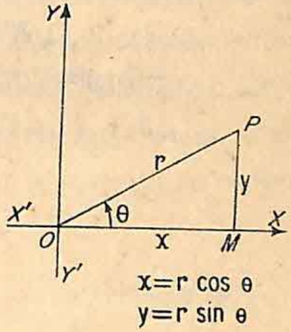
ধরা যাক, আয়ত অক্ষদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে P হইল (x,y) বিন্দু। মনে করা হইল 'পোল' O এবং প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OX}$ সম্পর্কে P এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক হইল (r, θ)। ধরা যাক, x-অক্ষের উপর $\overline{OP}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{OM}$; সংজ্ঞা অনুসারে,

$\overline{OM}=x,\ \overline{MP}=y,\ |\overline{OP}|=r,\ \angle MOP=\theta.$

সমকোণী ত্রিভুজ OMP হইতে,

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

অর্থাৎ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ... **(1)**



চিত্র 1.9. 'কার্টেজীয়' এবং 'পোলার' স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে **'কার্টেজীয় স্থানাঙ্ককে 'পোলার' স্থানাঙ্কে** রূপান্তরিত করা যায়।

আরও পাওয়া যায় যে : (i) $r^2=x^2+y^2$ এবং $r=+\sqrt{x^2+y^2}$
(ii) θকে এইরূপে নির্ণয় করা হয় যেন $x=r\cos\theta$ ও $y=r\sin\theta$ এই উভয় সম্পর্ক সিদ্ধ হয়। ... **(2)**

টীকা। $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ সম্পর্কটি দ্ব্যর্থক, সুতরাং পরিহার করা উচিত। **(2)** এ বিবৃত তথ্যের সাহায্যে **'পোলার' স্থানাঙ্ককে 'কার্টেজীয়' স্থানাঙ্কে** রূপান্তরিত করা যায়।

উদা. 1. যে বিন্দুর কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, 1)$ তাহার পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $-\sqrt{3}=r\cos\theta,\ 1=r\sin\theta$; সুতরাং $r=+\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1)^2}=2$

θ এমন কোণ যেন $\cos\theta=-\sqrt{3}/2$ এবং $\sin\theta=1/2$.

$\therefore$ θ অবশ্যই **দ্বিতীয় পাদতে** আছে, সুতরাং $\theta=150^\circ$ বা $5\pi/6$.

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $(2, 5\pi/6)$.

উদা. 2. যে বিন্দুর 'পোলার' স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$, তাহার কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $x=\sqrt{2}\cos 5\pi/4=-1,\ y=\sqrt{2}\sin 5\pi/4=-1$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক $(-1, -1)$.

অনুশীলনী

1. কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন বিন্দুগুলির 'পোলার' স্থানাঙ্ক হইল :
$(2, \frac{\pi}{3}), (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}), (3, \frac{3\pi}{2}), (1, \frac{11\pi}{6})$.

2. সেই বিন্দুগুলির 'পোলার' স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যাহাদের কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক হইল :
$(\sqrt{3}, 1), (1, -1), (-1, -\sqrt{3}), (0, 1)$.

[উত্তর : 1. $(1, \sqrt{3}), (-2, 2), (0, -3), (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.
2. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$].

2

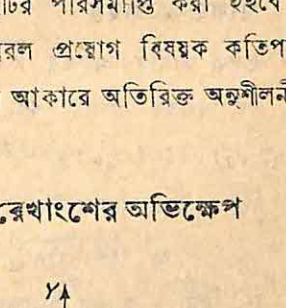
দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব
(DISTANCE BETWEEN TWO POINTS) :
বিভক্তিকরণের অনুপাত ঃ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
(SECTION RATIO : AREA OF TRIANGLES)

2·1. সূচনা

পূর্ববর্তী অধ্যায় দুইটিতে আলোচিত স্থানাঙ্কের ধারণাগুলির সহজ প্রয়োগই বর্তমান অধ্যায়ের বিষয়বস্তু। কোন বিন্দুর কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OP}$ (চিত্র 1.1) এর স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ বিবেচনা করা হইয়াছিল। পরবর্তী প্রশ্নটি হইল, যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ (চিত্র 2.1) এর অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ বিবেচনা করা। ইহা হইতে দুইটি বিন্দুর অন্তর্বর্তী দূরত্ব নির্ণয় এবং যে বিন্দু একটি রেখাংশকে কোনও নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় সম্পর্কে প্রশ্ন আসিবে। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি প্রদর্শনের পর অধ্যায়টির পরিসমাপ্তি করা হইবে। প্রত্যেক অনুচ্ছেদে উহা হইতে লব্ধ ফল বা সূত্রের সরল প্রয়োগ বিষয়ক কতিপয় অনুশীলনী প্রদত্ত হইয়াছে। অধ্যায়ের শেষে বিবিধ প্রশ্নের আকারে অতিরিক্ত অনুশীলনী প্রদত্ত হইল—ইহারা অধিকতর জটিল প্রকৃতির।

2·2. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপ

এক সেট্ আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে ধরা যাক্ P_1 ও P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। অক্ষদ্বয়ের উপর দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় করিতে হইবে (চিত্র 2.1)।



চিত্র 2.1. $\overline{P_1P_2}$ এর অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ

ভগ্ন-রেখা P_1OP_2 বিবেচনা করা যাক্। অনুচ্ছেদ 0·3 হইতে জানা যায় যে

x-অক্ষের উপর P_1OP_2 এর অভিক্ষেপ

$= \overline{P_1O}$ এর অভিক্ষেপ $+ \overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ

(উভয় অভিক্ষেপই x-অক্ষের উপর)

$= -(\overline{OP_1}$ এর অভিক্ষেপ $) + \overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ (উভয় অভিক্ষেপই x-অক্ষের উপর)

$= -\overline{OM_1} + \overline{OM_2}$

$= -x_1 + x_2$.

অনুরূপ ভাবে, Y-অক্ষের উপর P_1OP_2 এর অভিক্ষেপ $= -y_1 + y_2$.

অনুশীলনী

1. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর রেখাংশ $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর, যেখানে P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে :

(*i*) (3, 2), (6, 5) ; (*ii*) (−2, 3), (−8, −2) ;

(*iii*) (2, 1), (7, 1) ; (*iv*) (−2, −1), (5, −4).

2. A, B, C, D হইল যথাক্রমে (−2, 4), (3, 2), (−3, −1), (2, 3) বিন্দু। দেখাও যে x-অক্ষের উপর $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ এর অভিক্ষেপ দুইটি সমান।

[উঃ **1.** (*i*) 3, 3 ; (*ii*) 5, 0 ; (*iii*) −6, −5 ; (*iv*) 7, −3.]

2·3. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

আয়ত অক্ষদ্বয়

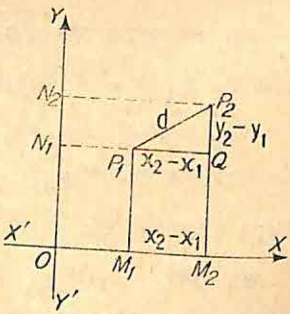
প্রদত্ত স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$

এই অক্ষদ্বয় সম্পর্কে ধরা যাক P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)।

ধরা যাক X-অক্ষের উপর $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{M_1M_2}$.

$\therefore \ M_1M^2 = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = x_2 - x_1.$

P_1 দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা এবং P_2 দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক্, এই রেখা দুইটির ছেদবিন্দু Q দ্বারা নির্দেশিত হয়।



চিত্র 2.2

স্পষ্টত, $\overline{QP_2} = y$-অক্ষের উপর $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ $= y_2 - y_1$

এবং $\overline{P_1Q} = \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$.

এখন সমকোণী ত্রিভুজ P_1QP_2 হইতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1Q}|^2 + |\overline{QP_2}|^2$$

অর্থাৎ $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$\therefore \quad d=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$

বিশেষ ক্ষেত্রে, মূলবিন্দু O হইতে $P_1:(x_1, y_1)$ এর দূরত্ব $=+\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

উদা. 1. যে ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $(-2, 3)$, $(-2, -1)$, $(4, -1)$ বিন্দু, তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

বিন্দু তিনটিকে যথাক্রমে A, B এবং C ধরিয়া,

$AB^2=|\overline{AB}|^2=(-2+2)^2+(-1-3)^2=16$; $\therefore |\overline{AB}|=4$

$BC^2=|\overline{BC}|^2=(4+2)^2+(-1+1)^2=36$; $\therefore |\overline{BC}|=6$

$CA^2=|\overline{CA}|^2=(-2-4)^2+(3+1)^2=52$; $\therefore |\overline{CA}|=2\sqrt{13}$.

আরও লক্ষ্য কর যে $AB^2+BC^2=CA^2$; সুতরাং A, B, C একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, যাহার B কোণ $=90°$.

উদা. 2. দেখাও যে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সমরেখ :

$$A:(-3, -2),\ B:(5, 2),\ C:(9, 4).$$

$AB=\sqrt{(5+3)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{(9-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$$AC=\sqrt{(9+3)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{5}.$$

যেহেতু $AB+BC=AC$ ($\because\ 4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$), সুতরাং A, B, C বিন্দু তিনটি এক সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ সমরেখ।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দু-যুগলগুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

$(2, 1)$ এবং $(-2, -2)$; $(-3, -6)$ এবং $(-14, -8)$;

$(4, 8)$ এবং $(4, -8)$; $(3, -5)$ এবং $(8, 7)$.

[উঃ 5 ; $5\sqrt{5}$; 16 ; 13]

2. প্রমাণ কর যে $(at^2, 2at)$ এবং $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব

$$a\left(t+\frac{1}{t}\right)^2.$$

3. প্রমাণ কর যে বিন্দুদ্বয় $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ও $(a\cos\phi, a\sin\phi)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হইল $2a\sin\frac{\theta-\phi}{2}$.

4. প্রমাণ কর যে $(4, -2)$, $(8, 2)$, $(7, -1)$ বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ এবং ইহার ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $(-7, 1), (5, -4), (10, 8), (-2, 13)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু এবং বর্গটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে $(-1, -2)$ বিন্দুটি একটি বৃত্তের কেন্দ্র যাহা $(11, 3), (-1, -15), (-13, -7), (4, -14)$ বিন্দুগামী।

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $(-2, 3), (-2, -1)$ এবং $(4, -1)$ বিন্দু; উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। শীর্ষগুলি মূলবিন্দু হইতে কত দূরে অবস্থিত?

[উঃ 4 ; 6 ; $2\sqrt{13}$; $\sqrt{13}, \sqrt{5}, \sqrt{17}$]

8. প্রমাণ কর যে $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ এবং উহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$.

9. একটি রেখার দৈর্ঘ্য 10 একক এবং ইহার এক প্রান্ত $(2, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত; যদি উহার অপর প্রান্তের ভুজ 10 হয় তবে প্রমাণ কর যে ঐ প্রান্তবিন্দুর কোটি হয় 3 অথবা -9.

10. দেখাও যে নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সমরেখ :

(i) $(0, 4), (3, -2), (-2, 8)$; (ii) $(-2, 3), (-6, 1), (-10, -1)$;
(iii) $(1, 2), (-3, 10), (4, -4)$; (iv) $(1, 3), (-2, -3), (3, 7)$.

তির্যক অক্ষ*

পরস্পর ω কোণে নত অক্ষদ্বয়ের ক্ষেত্রে বিন্দুদ্বয় $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$ এর মধ্যে দূরত্ব

$$= +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

ইহা চিত্র 2.3 হইতে পাওয়া যাইবে, কারণ

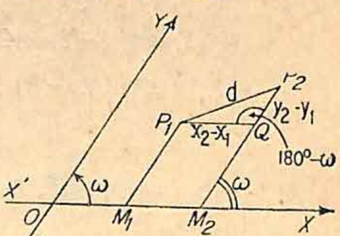
$\overline{OM_1} = x_1$, $\overline{OM_2} = x_2$, ফলে

$\overline{M_1M_2} = \overline{P_1Q} = x_2 - x_1$;

$\overline{M_1P_1} = y_1$, $\overline{M_2P_2} = y_2$ এবং

$\overline{QP_2} = y_2 - y_1$;

আবার $\angle P_1QP_2 = \angle M_1M_2P_2$ $= 180° - \omega$.



চিত্র 2.3. দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (তির্যক অক্ষ)

সুতরাং, $P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2 - 2P_1Q.QP_2\cos(180° - \omega)$

[সমতল ত্রিকোণমিতি—10ম অধ্যায়, উপপাদ্য 3 দ্রষ্টব্য।]

$$\therefore \quad d^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega.$$

* পাঠ্যসূচীর অন্তর্ভুক্ত নহে। তবে সূত্রটি আগ্রহী ছাত্র-ছাত্রীদের মনোযোগ আকর্ষণ করিতে পারে

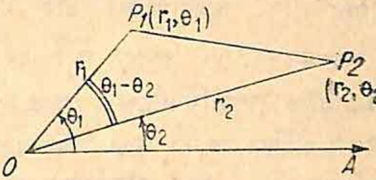
যদি $\omega = 90^\circ$ হয়, তবে অক্ষদ্বয় আয়ত হইয়া যায় এবং তখন d^2 এর পূর্বে নির্ণীত মান পাওয়া যায়, যথা :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

বিন্দুদ্বয়ের মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) হইলে উহাদের মধ্যে দূরত্ব

ধরা যাক $\overrightarrow{OA}$ প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি; পোল O.

ধরা যাক P_1 এবং P_2 এর মেরু (polar) স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2)। $\overline{P_1P_2}$ দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 2.4. মেরু বা পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

2.4 চিত্র হইতে,

$$\overline{OP_1} = r_1, \ \overline{OP_2} = r_2 ; \ \angle AOP_1 = \theta_1, \ \angle AOP_2 = \theta_2,$$

সুতরাং $\angle P_2OP_1 = \theta_1 - \theta_2$

$\triangle OP_2P_1$ হইতে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে পাওয়া যায় :

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2\overline{OP_1}.\overline{OP_2} \cos P_2OP_1$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)$$

$\therefore$ **দূরত্ব** $\overline{P_1P_2} = + \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)}$.

অনুশীলনী

1. P_1 এবং P_2 এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর যদি উহাদের মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক হয় যথাক্রমে :

(i) $(2, 30^\circ)$ এবং $(4, 120^\circ)$; (ii) $(a, \frac{\pi}{2})$ এবং $(3a, \pi/6)$.

2. প্রমাণ কর যে $(0, 0)$, $(3, \pi/2)$ এবং $(3, \pi/6)$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

2·4. নির্দিষ্ট অনুপাতে একটি রেখাংশের বিভক্তিকরণ

এক প্রস্থ আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে, ধরা যাক, $P_1 : (x_1, y_1)$ এবং $P_2 : (x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখাংশের উপর $P : (x, y)$ একটি বিন্দু।

চিত্র 2.5 এ P, **রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যে** অবস্থিত। চিত্র 2.6 এ P, **রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর বাহিরে** অবস্থিত [**বরং বলা ভাল**, P, (উভয়দিকে) বর্ধিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যে যে কোন বিন্দু]। প্রথম ক্ষেত্রে বলা হয় যে P, $\overline{P_1P_2}$ কে **অন্তর্বিভক্ত** করিয়াছে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে P, $\overline{P_1P_2}$ কে **বহির্বিভক্ত** করিয়াছে।

প্রসঙ্গত স্মরণ করা যায় যে প্রত্যেক দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের উপর একটি অনুরূপ বাস্তব সংখ্যা আরোপ করা যায়—সংখ্যাটি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইতে পারে (অনুচ্ছেদ 0·2)। সুতরাং $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর উপর দুইটি অনুরূপ সংখ্যা আরোপ করা হইল ; **অন্তর্বিভাগের** ক্ষেত্রে সংখ্যা দুইটি অবশ্যই একই চিহ্নযুক্ত হইবে (হয় উভয়ে ধনাত্মক অথবা উভয়ে ঋণাত্মক, কারণ $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটির অভিমুখ সদৃশ), কিন্তু **বহির্বিভাগের** ক্ষেত্রে সংখ্যা দুইটির চিহ্ন অবশ্যই পরস্পর বিপরীত হইবে (একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, কারণ $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটি এখন পরস্পর বিপরীত অভিমুখী)। মনে করা যাক্, $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর জন্য সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে m এবং n ধার্য করা হইল। এই সংখ্যা দুইটি **হুবহু $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ দৈর্ঘ্য হইতে পারে** অথবা উহারা এই **দৈর্ঘ্য দুইটির সমানুপাতী হইতে পারে**। উভয় ক্ষেত্রেই $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$.

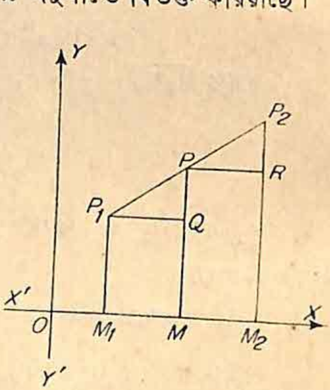
নিম্নলিখিত ভাষায় উপরের বক্তব্যটিকে সংক্ষিপ্তাকারে দেওয়া হইল :

P, রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ কে $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

অনুপাত $m : n$ ধনাত্মক, যখন $\overline{P_1P_2}$ কে P অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঋণাত্মক, যখন বহির্বিভক্ত করে।

এখন P এর স্থানাঙ্ক x এবং y কে P_1 এবং P_2 এর স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইবে।

যেহেতু, $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$, সুতরাং x-অক্ষের উপর $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর অভিক্ষেপ দুইটিও অবশ্যই একই অনুপাত $m : n$ এ থাকিবে, ফলে (চিত্র 2.5 দ্রষ্টব্য)



চিত্র 2.5. অন্তর্বিভাগ

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{m}{n}$$

বা, $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

বা, $nx - nx_1 = mx_2 - mx$, এবং ইহা হইতে $x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

y-অক্ষের উপর অভিক্ষেপ সম্পর্কে অনুরূপ বিবেচনার ফলে y এর মান নির্ণায়ক সূত্রটি পাওয়া যাইবে। সুতরাং P এর স্থানাঙ্ক দুইটি হইল

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

চিত্র 2.6 এর ক্ষেত্রেও অনুরূপ যুক্তি প্রযোজ্য—কেবল মনে রাখিতে হইবে যে $m:n$ অনুপাত এখন ঋণাত্মক (m, n এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক)।

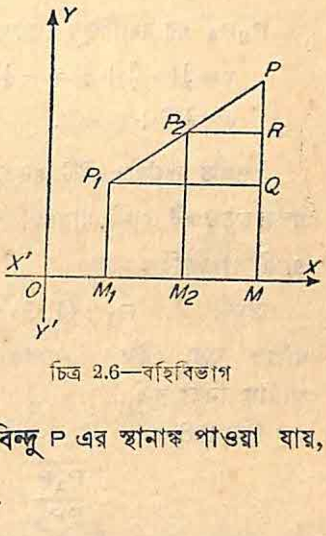
[লক্ষ্য কর ($m:-n$ এই অনুপাত লইলে) যে

$$\frac{m}{-n}=\frac{\overline{M_1M}}{MM_2}=\frac{x-x_1}{-(x-x_2)}=\frac{x-x_1}{x_2-x};\ \text{সুতরাং } x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.\ ]$$

টীকা : $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{m}{n}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$ এই সত্যটি, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ P_1QP এবং PRP_2 লইয়া বিবেচনা করিলেও সঠিক বলিয়া যাচাই করা যায় ; কারণ চিত্র 2.6 অনুসারে

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{RP_2}}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$$

(চিত্র 2.5 এর সাহায্যেও ইহা প্রমাণ সাপেক্ষ)।



চিত্র 2.6—বহির্বিভাগ

একটি গুরুত্বপূর্ণ বিশেষ ক্ষেত্র

যখন $m=n$, তখন **রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু** P এর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়,

$$\text{যথা :}\quad x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

মন্তব্য : P_1 এবং P_2গামী রেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত অবস্থায় বিবেচনা করা যাক্। বিভাজন বিন্দু P যখন P_1 এর সহিত মিলিত হয়, তখন অনুপাত $m:n=0$; P কে P_1 এর বাম পার্শ্বে আনিয়া P_1 হইতে অসীম দূরত্বে লইয়া যাইতে থাকিলে অনুপাতটির মান 0 হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে -1 এর দিকে অগ্রসর হয় ; P যখন P_1 হইতে P_2 তে যায়, তখন অনুপাতটির মান 0 হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে ∞ অভিমুখে যায়। যখন P, P_2 এর সহিত মিলিত হইয়া পরে P_2 এর দক্ষিণ পার্শ্বে অসীম দূরত্বে যায়, তখন অনুপাতটির মান $-\infty$ হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে -1 অভিমুখে অগ্রসর হয়। সুতরাং সমগ্র রেখাটির বাম হইতে দক্ষিণে P চলিতে থাকিলে

$-1<\frac{m}{n}\leqslant 0\{P_1\}$; $0<\frac{m}{n}<\infty\{P_2\}$; $-\infty<\frac{m}{n}<-1$.

উদা. 1. দেখাও যে, কোন চতুর্ভুজের শীর্ষ চারিটি P_1 : $(-\frac{3}{2}, 4)$, P_2 : $(-\frac{7}{2}, 3)$, P_3 : $(1, 0)$, P_4 : $(3, 1)$ হইলে উহা একটি সামান্তরিক।

চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহা একটি সামান্তরিক—এখানে এই সুপরিচিত তথ্যটির সাহায্য লওয়া হইবে।

P_1P_3 এর মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে

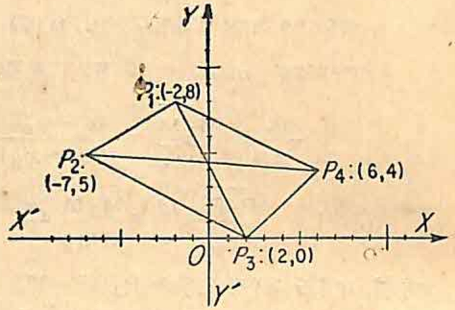
$x=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)=-\frac{1}{4}$,

$y=\frac{1}{2}(4+0)=2$;

P_2P_4 এর মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে

$x=\frac{1}{2}(-\frac{7}{2}+3)=-\frac{1}{4}$,

$y=\frac{1}{2}(3+1)=2$.



চিত্র 2.7

যেহেতু মধ্যবিন্দু দুইটি একই বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, সুতরাং প্রমাণিত হইল যে প্রদত্ত চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। অনুরূপভাবে যাচাই কর চিত্র 2.7এ $P_1P_2P_3P_4$ একটি সামান্তরিক নহে।

উদা. 2. P_1 : $(1, 3)$ এবং P_2 : $(5, -2)$ এর সংযোজক রেখাংশকে সমত্রিখণ্ডিত করা হইল। সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলির মধ্যে P_1 এর নিকটতর বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 2.8 এ

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

($\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ উভয়েরই অভিমুখ নিম্ন দিকে বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে।)

সুতরাং সমত্রিখণ্ডক বিন্দু দুইটির মধ্যে P_1 এর নিকটতর বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক :

$$x=\frac{2.1+1.5}{2+1},\quad y=\frac{2.3+1.(-2)}{2+1}$$

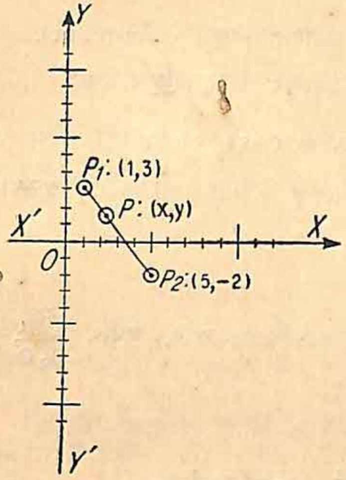
বা, $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

অর্থাৎ P এর স্থানাঙ্ক $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$.

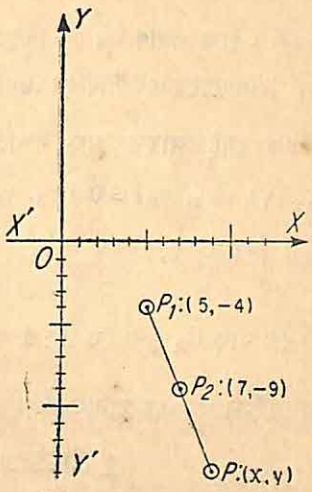
উদা. 3. P_1 : $(5, -4)$ হইতে P_2 : $(7, -9)$ পর্যন্ত রেখাংশকে P_2 এর অভিমুখে এইরূপ বর্ধিত করা হইল, যেন উহার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হয়। অন্তিম বিন্দু P চিত্র 2.9) এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $|\overline{P_1P}| = 2|\overline{PP_2}|$, কিন্তু $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটির অভিমুখ পরস্পর বিপরীত ; $\overline{P_1P}$ নিম্নমুখী এবং $\overline{PP_2}$ উর্ধ্বমুখী। সুতরাং লওয়া হইল :

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{-2}{1}$$; ধরা যাক P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।



চিত্র 2.8



চিত্র 2.9

তাহা হইলে, $x = \dfrac{-2\times 7+1\times 5}{-2+1} = \mathbf{9}$,

$$y = \frac{-2\times(-9)+1\times(-4)}{-2+1} = -\mathbf{14}$$

$\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $=(9, -14)$.

উদা. 4. কেন্দ্র $P_1(-4, +1)$ বিন্দুতে অবস্থিত এইরূপ একটি বৃত্তের কোন ব্যাসের একটি প্রান্ত বিন্দু P_2 $(2, 6)$; উহার অপর প্রান্ত বিন্দু P (x, y) এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \dfrac{-1}{+2}$ (চিত্র অঙ্কন করিয়া লও)

সুতরাং $x = \dfrac{(-1)2+2(-4)}{-1+2} = -\mathbf{10}$

এবং $y = \dfrac{(-1)\,6+2\,(1)}{-1+2} = -\mathbf{4}$

$\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $(-10, -4)$.

উদা. 5. **ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (Centroid)**

ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F. বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে, যে বিন্দু $\overline{AD}$কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ রেখাংশদ্বয়কেও একই অনুপাতে বিভক্ত করে।

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু (concurrent).

(মধ্যমাত্রয়ের এই সাধারণ ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** বলা হয়।)

এক সেট্ আয়ত অক্ষ সম্পর্কে শীর্ষ A, B, C এর স্থানাঙ্ক ধরা হইল যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3)। যেহেতু $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু D, সুতরাং Dএর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$।

ধরা যাক্ G_1, $\overline{AD}$ কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, অর্থাৎ $\frac{\overline{AG_1}}{G_1D}=\frac{2}{1}$;

তাহা হইলে G_1 এর স্থানাঙ্ক হইল :

$$\bar{x}=\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_3+x_3}{3}$$

তদ্রূপ $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

যদি G_2 এমন বিন্দু লওয়া হয় যাহা $\overline{BE}$কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে অনুরূপভাবে দেখা যাইবে যে G_2 এর স্থানাঙ্কও হইবে :

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

আবার G_3 যদি $\overline{CF}$কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তবে G_3র স্থানাঙ্ক হইবে

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

সুতরাং G_1, G_2, G_3 বিন্দু তিনটি একটি বিন্দুতে মিলিত হয়, **অর্থাৎ** মধ্যমা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়, যাহার স্থানাঙ্ক হইল :

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

এই বিন্দুটি ত্রিভুজটির **ভরকেন্দ্র**।

অনুশীলনী

[সংখ্যা-সংশ্লিষ্ট প্রশ্নে একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া বিন্দুগুলি মোটামুটিভাবে বসাইয়া লওয়া বাঞ্ছনীয়।]

1. রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$কে বিন্দু P (x, y) এইরূপভাবে বিভক্ত করে যে $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$; নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(i) $P_1 : (4, -3)$, $P_2 : (1, 4)$; $m : n = 2 : 1$.

(ii) $P_1 : (5, 3)$, $P_2 : (-3, -3)$; $m : n = 1 : 3$.

(iii) $P_1 : (-2, 3)$, $P_2 : (3, -2)$; $m : n = 2 : 5$.

(iv) $P_1 : (0, 3)$, $P_2 : (7, 4)$; $\frac{m}{n} = -\frac{2}{7}$.

(v) $P_1 : (-5, 2)$, $P_2 : (1, 4)$; $\frac{m}{n} = -\frac{5}{3}$.

(vi) $P_1 : (2, -5)$, $P_2 : (6, 3)$; $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

2. ত্রিভুজের শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক নিম্নে প্রদত্ত হইল; প্রতি ক্ষেত্রে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর:

(i) (5, 7), (1, −3), (−5, 1).

(ii) (3, 6), (−5, 2), (7, −6).

(iii) (7, 4), (3, −6), (−5, 2).

3. P_1 (6, 8) হইতে P_2 (x_2, y_2) পর্যন্ত রেখাংশকে যদি কোন বিন্দু (9, 2) 3 : 7 অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে P_2 এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (3, 2), (−1, −2) এবং (5, −4) হইলে ত্রিভুজটির শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে A (−3, 2), B (5, 4), C (7, −6), D(−5, −4) শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাগুলি একটি দ্বিতীয় চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে, যাহার পরিসীমা প্রথম চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

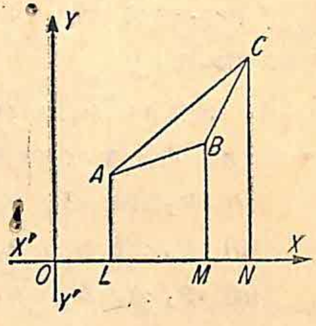
[উত্তর 1. (i) (2, 5/3); (ii) (3, 3/2); (iii) (−4/7, 11/7); (iv) (−14/5, 13/5); (v) (10, 7); (vi) (26/7, −11/7). 2. (i) (1/3, 5/3); (ii) (5/3, 2/3); (iii) (5/3, 0). 3. (16, −12). 4. (−3, 4), (9, 0), (1, −8).]

2·5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

এক সেট্ আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে A, B এবং C এর স্থানাঙ্ক, ধরা যাক্, যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), এবং (x_3, y_3)।

△ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

শীর্ষত্রয় A, B, Cকে সেই ক্রম অনুসারে লওয়া হইল, যে ক্রমে উহাদের সহিত কোন ব্যক্তির সাক্ষাৎ হইবে, যদি ঐ ব্যক্তি A হইতে যাত্রা করিয়া ABC **দ্বারা অধিকৃত অঞ্চলটিকে সর্বদা তাঁহার বাম দিকে রাখিয়া** ত্রিভুজটিকে প্রদক্ষিণ করেন। এই ক্ষেত্রে বলা হয় যে শীর্ষগুলি, **ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে** সজ্জিত হইয়াছে।



চিত্র 2.10 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ধরা যাক্, A, B, C বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পাদবিন্দু যথাক্রমে L, M, N (চিত্র 2.10)।

△ABC এর ক্ষেত্রফল = ট্র্যাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল − ট্র্যাপিজিয়াম ALMB এর ক্ষেত্রফল − ট্র্যাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল। *

সুতরাং △ABC এর ক্ষেত্রফলকে যদি A দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তবে

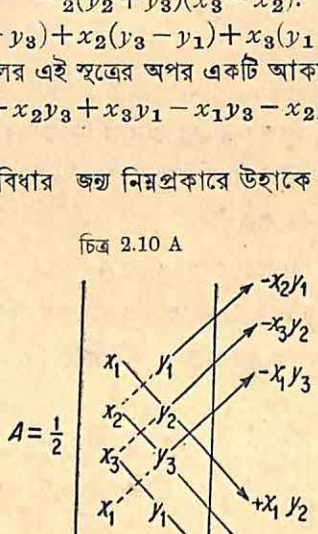
$$A=\tfrac{1}{2}(\overline{LA}+\overline{NC}).\ \overline{LN}-\tfrac{1}{2}(\overline{LA}+\overline{MB}).\ \overline{LM}-\tfrac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{NC}).\ \overline{MN}$$
$$=\tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)-\tfrac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2).$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ বর্গএকক} \quad \cdots \quad (1)$$

△ABC এর ক্ষেত্রফলের এই সূত্রের অপর একটি আকার :

$$A=\tfrac{1}{2}[\ x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2\ ] \quad \text{বর্গ একক} \quad \cdots \quad (2)$$

সূত্রটি মনে রাখার সুবিধার জন্য নিম্নপ্রকারে উহাকে সজ্জিত করিয়া লেখা যাইতে পারে :

চিত্র 2.10 A



… … (3)

---

* **বিঃ দ্রঃ.** যে চতুর্ভুজের দুইটিমাত্র বাহু সমান্তরাল তাহাকে ট্র্যাপিজিয়াম বলে এবং ইহার ক্ষেত্রফল হইল, সমান্তরাল বাহু দুইটির সমষ্টি ও উহাদের লম্ব দূরত্বের গুণফলের অর্ধেক।

লক্ষ্য করা যায় যে সজ্জাটির প্রথম সারিটি নিচে আরও একবার পুনরাবৃত্ত হইয়াছে।

উপরে প্রদত্ত **(1)** এর আকারটি নিম্নের ছক (determinant)টিরই বিস্তৃতি মাত্র, যথা :

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক } \cdots \quad \cdots \qquad \textbf{(4)}$$

ছাত্রছাত্রীরা (1), (2), (3), (4) আকারগুলির যে কোন একটি স্মরণ রাখিতে পারে।

টীকা। ভিন্ন একটি প্রমাণের জন্য অনুশীলনীর 9নং প্রশ্ন (পাতা 25) দ্রষ্টব্য।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য :

শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে সজ্জিত হইলে △ABC এর ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি সর্বদা **ধনাত্মক** হইতে দেখা যায় ; যদি শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে লওয়া হয় তবে ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি **ঋণাত্মক** হয়।

সংখ্যা-সংশ্লিষ্ট প্রশ্নের ক্ষেত্রে :

শীর্ষগুলিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লওয়া বাঞ্ছনীয়—ইহাতে (1) অথবা (2) আকারের সূত্র হইতে ধনাত্মক মান পাওয়া যাইবে। বিন্দুগুলিকে মোটামুটিভাবে সংস্থাপিত করিয়া ইহা করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় মূলবিন্দু (0, 0) এবং (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয় তাহার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2)$।

[মূল সূত্রে $x_1=y_1=0$ ধরিয়া]

অনুসিদ্ধান্ত 2. তিনটি বিন্দু, যথা : A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2) এবং C : (x_3, y_3) সমরেখ (collinear) হইবার শর্ত হইল এই যে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ক রাশিটি শূন্য হইবে, অর্থাৎ শর্তটি হইল :

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

$$\text{বা, } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (−3, −2), (1, 4), (2, 3) ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল}=\tfrac{1}{2}[-3(4-3)+1(3+2)+2(-2-4)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[-3+5-12]=-5 \textbf{ বর্গ একক}।$$

ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বুঝা যায় যে শীর্ষত্রয় $(-3, -2)$, $(1, 4)$ এবং $(2, 4)$ ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে আছে।

ক্ষেত্রফলটির সাংখ্যমান$=5$ **বর্গএকক**।

উদা. 2. A : $(3, 1)$, B : $(2k, 3k)$, C : $(k, 2k)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে পৃথক বিন্দুত্রয় A, B, C সমরেখ হইবে, যদি $k=-2$ হয়।

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \tfrac{1}{2}[3(3k-2k)+2k(2k-1)+k(1-3k)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[3k+4k^2-2k+k-3k^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}[k^2+2k] \text{ বর্গ একক}$$

যদি A, B, C সমরেখ হয়, তবে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ক রাশিটি$=0$

$$\therefore \quad k(k+2)=0$$

$$\therefore \quad \text{হয় } k=0, \qquad \text{অথবা } k=-2$$

কিন্তু যদি $k=0$ হয়, তবে B এবং C মিলিত হয় এবং তিনটি পৃথক বিন্দু থাকে না।

$$\therefore \quad k \text{ এর নির্ণেয় মান} = -2.$$

অনুশীলনী

1. $(2, 3)$, $(5, 7)$ এবং $(-3, 4)$ বিন্দুত্রয় সংস্থাপিত কর। বিন্দুগুলিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লইয়া ইহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উঃ 11·5 বর্গ একক]

2. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন উহাদের শীর্ষগুলি হইবে :

(i) $(2, -3)$, $(4, 2)$ এবং $(-5, -2)$;
(ii) $(-3, 4)$, $(6, 2)$ এবং $(4, -3)$;
(iii) $(-7, 5)$, $(1, 1)$ এবং $(-3, 3)$;
(iv) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ এবং $(c, a+b)$.

[উঃ (i) 18·5 ; (ii) 24.5 ; (iii) 0 ; (iv) 0]

3. দেখাও যে উপরের প্রশ্ন 2(i) এর ত্রিভুজটির বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সরলরেখার দ্বারা যুক্ত করিয়া যে চারিটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

4. দেখাও যে $(t, t-2)$, $(t+3, t)$, $(t+2, t+2)$ বিন্দু তিনটি যে ত্রিভুজের শীর্ষ, তাহার ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি t বর্জিত।

5. $\triangle OAB$ এর শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$, $(\sin \phi, \cos \phi)$; দেখাও যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান চরম (maximum) হইবে যখন $\theta=\phi$ এবং এই চরম মান নির্ণয় কর।

[উঃ $\frac{1}{2}b$ বর্গ একক]

6. A, B, C, D হইল যথাক্রমে $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 2)$, $(3-2t, t^2+5)$ বিন্দু এবং O মূলবিন্দু $(0, 0)$; যদি $\triangle$OAB এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle$OCB এর ক্ষেত্রফল (মান এবং চিহ্ন উভয় বিষয়ে) হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $t=1$, বা, -3]

7. দেখাও (ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ দ্বারা) যে নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সমরেখ :

(i) $(3, 0), (2, \frac{1}{2}), (4, -\frac{1}{2})$.

(ii) $\left(-2, -\frac{1}{b}\right), \left(-3, -\frac{2}{b}\right), \left(1, \frac{2}{b}\right)$.

(iii) $(a, 0), (am^2, 2am), \left(\frac{a}{m^2}, -\frac{2a}{m}\right)$.

8. A, B, C হইল যথাক্রমে $(3, 4)$, $(5, 2)$, (x, y) বিন্দু ; যদি $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফলের মান $+3$ বর্গএকক হয়, তবে দেখাও যে $x+y-10=0$.

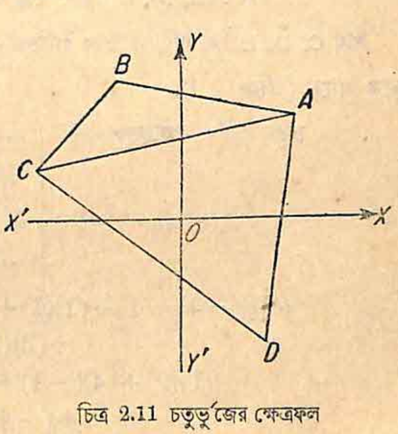
*9. O মূলবিন্দু এবং A, B এর মেরু (polar) স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) হইলে প্রমাণ কর যে $\triangle$OAB এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2-\theta_1)$; কিন্তু যদি A ও B এর অনুরূপ আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক হয় যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2), তবে ঐ ক্ষেত্রফল হইবে $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$।

এই রাশিটি হইতে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যখন A, B, C এর স্থানাঙ্ক হইবে যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) এবং দেখাও যে ঐ ক্ষেত্রফল হইল :

$$\tfrac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3].$$

2·6 চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a quadrilateral)

চতুর্ভুজের শীর্ষগুলি যদি ক্রমান্বয়ে গৃহীত বিন্দু A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2), C : (x_3, y_3), D : (x_4, y_4) হয়, তবে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



চিত্র 2.11 চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

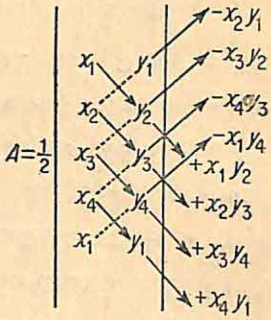
ধরা যাক্ ABCD প্রদত্ত চতুর্ভুজ (চিত্র 2.11) ABCD এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle$CDA এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}[x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4)]+\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)+x_4(y_1-y_3)$$
$$+x_1(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(x_1\,y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+(x_4y_1-x_1y_4)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_1y_4-x_2y_1-x_3y_2$$
$$-x_4y_3]$$ বর্গ একক।

সূত্রটি মনে রাখিতে হইলে :

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_4, y_4) স্থানাঙ্কগুলিকে দক্ষিণ পার্শ্বে প্রদত্ত পদ্ধতিতে সজ্জিত কর—লক্ষ্য কর, প্রথম সারিটি কেবল নিচে আর একবার পুনরাবৃত্ত হইয়াছে : চিত্র 2.11B দ্রষ্টব্য।



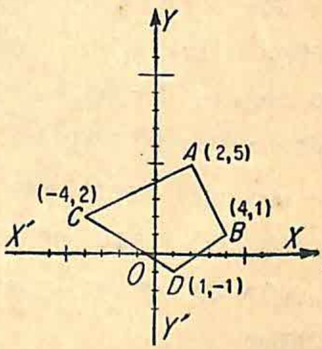
চিত্র 2.11B

টীকা : n-বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots (x_n, y_n)$ হইলে ইহা দেখান যায় যে বহুভুজটির ক্ষেত্রফল $=\tfrac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots\cdots+(x_ny_1-x_1y_n)]$ বর্গএকক।

উদা. 1. চতুর্ভুজ CDBAর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যেখানে

A : (2, 5), B : (4, 1), C : (−4, 2), D : (1, −1)

শীর্ষ C, D, B, A ঘড়ি কাঁটার গতির বিপরীত ক্রমে আছে (চিত্র 2.12)



চিত্র 2.12

$$\therefore \text{ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল}=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & -1\\ 4 & 1\\ 2 & 5\\ -4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\{(-4)(-1)+(1)(1)+(4)(5)+(2)(2)\}-\{(1)(2)+(4)(-1)+(2)(1)+(-4)(5)\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}[4+1+20+4-2+4-2+20]=\tfrac{49}{2}=24{\cdot}5$$ **বর্গ একক।**

উদা. 2. দেখাও যে কোন চতুর্ভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত শীর্ষগুলি $(a, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$ এবং $(0, -b)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল শূন্য। (প্রদত্ত : $a>0$ $b>0$)। উত্তরটির ব্যাখ্যা দাও।

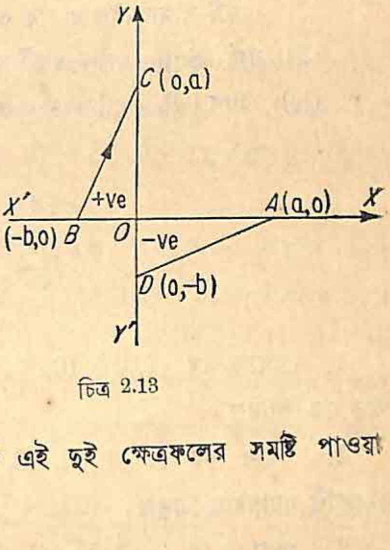
ধরা যাক্, শীর্ষগুলি A : $(a, 0)$, B : $(-b, 0)$, C : $(0, a)$ এবং এবং D : $(0, -b)$. শীর্ষগুলিকে A, B, C, D এই ক্রমে (চিত্র 2.13) লইয়া চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\therefore \text{ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 \\ -b & 0 \\ 0 & a \\ 0 & -b \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\{(a)(0)+(-b)(a)+(0)(-b)+(0)(0)\}-\{(-b)(0)+(0)(0)+(0)(a) + (a)(-b)\}]$$

$$= \tfrac{1}{2}[-ab+ab]=0.$$

প্রকৃত পক্ষে, চিত্রানুসারে ক্ষেত্রটিতে রহিয়াছে $\triangle$BCO (যাহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্য মান হইল $\frac{1}{2}ab$), যাহাকে ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখে লওয়া হইয়াছে এবং অবশিষ্ট অংশ $\triangle$ODA (যাহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমানও হইল $\frac{1}{2}ab$), যাহাকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লওয়া হইয়াছে। সুতরাং উপযুক্ত চিহ্ন গৃহীত এই দুই ক্ষেত্রফলের সমষ্টি পাওয়া গেল শূন্য।



চিত্র 2.13

অনুশীলনী

1. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন উহার ক্রমানুসারে গৃহীত শীর্ষবিন্দুগুলি হইল।

(i) $(0, 0)$, $(5, 1)$, $(4, 6)$, $(2, 5)$.

(ii) $(1, 4)$, $(-2, 1)$, $(2, -3)$, $(3, 3)$.

(iii) $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(5, -2)$, $(4, -7)$.

(iv) $(-1, 6)$, $(-3, -9)$, $(5, -8)$, $(3, 9)$.

2. নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর ও পরে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ; শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লইতে হইবে :

(i) $(-1, -1)$, $(-4, -2)$, $(-5, -4)$, $(-2, -3)$.

(ii) $(4, \frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2}, 3)$, $(-4, -\frac{3}{2})$, $(1, -6)$.

(iii) $(8, 7)$, $(0, -5)$, $(5, 0)$ $(-6, 2)$.

[উত্তর : 1. (i) 17 ; (ii) 18·5 ; (iii) 20·5 ; (iv) 96. 2. (i) 5 ; (ii) 34·5; (iii) 74.] [সবগুলি বর্গ এককে]

প্রাথমিক জ্যামিতিতে প্রদত্ত নিম্নলিখিত সংজ্ঞাগুলি প্রশ্ন সমাধানে সাহায্য করিবে :

(i) সামান্তরিক (Parallelogram)—
বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, সমান ; কর্ণদ্বয় পরস্পকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) আয়তক্ষেত্র (Rectangle)—
একটি সামান্তরিক যাহার কর্ণ দুইটি সমান ; প্রত্যেক কোণ $=90°$.

(iii) বর্গ (Square)—একটি আয়তক্ষেত্র, যাহার সকল বাহু পরস্পর সমান।

(iv) রম্বস (Rhombus)—একটি চতুর্ভুজ যাহার সকল বাহু পরস্পর সমান, কিন্তু কর্ণ দুইটি সমান নহে।

প্রশ্নমালা

(দ্বিতীয় অধ্যায়ের উপর)

[A]

1. দেখাও যে $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

2. প্রমাণ কর যে $(1, 8)$, $(3, 2)$, $(9, 4)$ যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু, তাহা একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

3. দেখাও যে $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষ। সামান্তরিকটি কি আয়তক্ষেত্র ?

4. দেখাও যে $(-7, 1)$, $(5, -4)$, $(10, 8)$, $(-2, 13)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষ এবং উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু।

6. প্রমাণ কর যে $(2, 5)$, $(5, 9)$, $(9, 12)$ এবং $(6, 8)$ বিন্দুগুলি ক্রমানুসারে যুক্ত হইলে একটি রম্বস উৎপন্ন করিবে।

7. প্রমাণ কর যে $(-\frac{1}{14}, \frac{39}{14})$ বিন্দুটি, (1, 1), (2, 3) এবং (−2, 2) বিন্দুগুলি যে ত্রিভুজের শীর্ষ তাহার পরিকেন্দ্র। পরিব্যাসার্ধটির দৈর্ঘ্য কত? [উঃ $\frac{5}{14}\sqrt{34}$]

8. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (3, 2) এবং উহা (13, −10) বিন্দুগামী। বৃত্তটি কি (−11, 9) বিন্দু দিয়া যায়? যুক্তি দাও। [উঃ না]

9. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (0, −13) এবং x-অক্ষ উহার একটি স্পর্শক। বৃত্তটি কি (11, −6) বিন্দু দিয়া যায়? উহা (−5, −1) বিন্দু দিয়া কি যায়? যুক্তি দাও। [উঃ না; হাঁ]

10. কোন বৃত্তের কেন্দ্র (5, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং উহার ব্যাসার্ধ 5; উহার যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (3, 2) তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ $4\sqrt{5}$]

11. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (1, 1) বিন্দুতে এবং উহার 10 একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা (2, 0) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়; উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [উঃ $3\sqrt{3}$]

[B]

1. (−3, 2) হইতে (1, −4) অভিমুখে নির্দেশিত ঐ দুই বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে তিনগুণ করা হইল। অন্তিম বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (9, −16)]

2. **দুইটি প্রণালীতে** দেখাও যে (−2, −2), (9, −1), (18, 2), (7, 1) বিন্দুগুলি যে চতুর্ভুজের শীর্ষ তাহা একটি সামান্তরিক।

3. (6, −2), (0, 7) এর সংযোজক রেখাংশকে উভয় দিকে এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন প্রত্যেক দিকের বর্ধিত অংশ মূল রেখাংশের এক-তৃতীয়াংশ হয়। অন্তিম বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (−2, 10); (8, −5)]

4. $(a+b,\ a-b)$ বিন্দু হইতে $(a-b,\ a+b)$ বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুদ্বয় $a : b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $(0<b<a)$

$$\left[\text{উঃ } \left(\frac{a^2+b^2}{a+b},\ \frac{a^2+2ab-b^2}{a+b}\right);\ \left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b},\ \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)\right]$$

5. যদি (3, −1), (−4, −3), (1, 5) বিন্দু তিনটি একটি সামান্তরিকের তিনটি শীর্ষ হয় এবং যদি চতুর্থ শীর্ষটি প্রথম পাদতে অবস্থিত হয়, তবে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (8, 7)]

6. $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু P হইলে এবং P ও P_1 এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (8, 17) ও (−5, −3) হইলে P_2 এর স্থানাঙ্ক কত? [উঃ (21, 37)]

7. (2, 5) এবং (8, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর ভুজ 6; উহার কোটি কত? [উঃ 3]

8. O মূল বিন্দু এবং P_1 ও P_2 যে কোন বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হইলে প্রমাণ কর যে

$$\overline{OP_1}.\overline{OP_2}\cos \widehat{P_1OP_2}=x_1x_2+y_1y_2.$$

[ইঙ্গিত : $2\triangle OP_1P_2=r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=x_1y_2-x_2y_1$.]

9. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যখন শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইবে :

(i) $(am_1^2, 2am_1)$, $(am_2^2, 2am_2)$ এবং $(am_3^2, 2am_3)$.

(ii) $(a\cos\phi_1, b\sin\phi_1)$, $(a\cos\phi_2, b\sin\phi_2)$ এবং $(a\cos\phi_3, b\sin\phi_3)$.

[উঃ (i) $a^2(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)$

(ii) $2ab\sin\frac{\phi_2-\phi_3}{2}\sin\frac{\phi_3-\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_1-\phi_2}{2}$]

10. একটি সামান্তরিকের তিনটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2,1)$, $(4,-5)$, $(4, 2)$; সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ও চতুর্থ শীর্ষটিও নির্ণয় কর। [উঃ 14 ; $(6,-4)$]

[C]

[প্রাথমিক জ্যামিতিতে প্রয়োগসমূহ]

সাধারণ মন্তব্য : 1. নৈপুণ্যে সহকারে স্থানাংক অক্ষ নির্বাচন কর, যাহাতে দীর্ঘ হিসাবকার্য পরিহার করা যায়।

2. প্রাথমিক জ্যামিতিতে চিত্রগুলির ধর্মসমূহের সহায়তায় প্রমাণ কার্য সমাধা করা হয়, কিন্তু বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে সংশ্লিষ্ট স্থানাংকগুলি লইয়া বীজগাণিতীয় কার্যাবলীর মধ্য দিয়া প্রমাণ কার্যটি সম্পন্ন করা হয় : **এক্ষেত্রে প্রশ্নটির প্রকৃতি স্মরণে রাখিতে সাহায্য করা ভিন্ন চিত্রের আর কোনও রূপ আবশ্যকতা নাই।**

বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির পদ্ধতি প্রয়োগ দ্বারা প্রমাণ কর যে :

1. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দুটি শীর্ষত্রয় হইতে সমদূরবর্তী।

4. ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান।

6. কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি বিপরীত শীর্ষ হইতে আয়তক্ষেত্রটির সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর দূরত্বের বর্গের সমষ্টি, অপর দুই শীর্ষ হইতে বিন্দুটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির সমান।

7. যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে

$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2)$, যেখানে D হইল BCর মধ্যবিন্দু।

[ইংগিত : B কে মূলবিন্দু, BC কে x-অক্ষ এবং BCর উপর লম্বরেখা (অবশ্যই B গামী) কে y-অক্ষ ধর। যদি $BC=a$ হয়, তবে A : (x, y), B : $(0, 0)$ এবং C : $(a, 0)$; আবার D : $(a/2, 0)$.]

8. যদি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এবং P, ত্রিভুজটির তলে অপর যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে

$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2$$

এবং $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$.

9. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশদ্বয় এবং উহার কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমবিন্দু এবং রেখাংশ তিনটি পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

11. যদি P বিন্দু $\overline{P_1P_2}$ রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং যদি Q বিন্দু P_1 ও P_2 এর সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত না হয়, তবে

$$\frac{\triangle QPP_1 \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle QPP_2 \text{ এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{m}{n}.$$

[D]

1. A : $(3, 0)$, B : $(0, 6)$ এবং C : $(6, 9)$ ত্রিভুজ ABC উৎপন্ন করে। একটি রেখা $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ কে যথাক্রমে D এবং E তে এইরূপভাবে ছেদ করে যে D বিন্দু $\overline{AB}$ কে $1 : 2$ অনুপাতে এবং E বিন্দুও $\overline{AC}$ কে একই অনুপাতে বিভক্ত করে। প্রমাণ কর যে

$$\frac{\triangle ABC \text{ এর ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান}}{\triangle ADE \text{ এর ক্ষেত্রকলের সাংখ্যমান}}=\frac{9}{1}$$

2. দুইটি পদ্ধতিতে দেখাও যে $(1, 5)$, $(3, 14)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

3. A : (6, 3), B : (−3, 5), C : (4, −2) এবং P : (a, b) বিন্দু চারিটি একটি সমতলে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ PBC এবং ABC এর ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান দুইটি $(a+b-2) : 7$ অনুপাতে আছে।

4. A : $(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ এবং B : $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে AB বরাবর কোন বিন্দু C(x, y) পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন $\overline{AC} : \overline{CB} = b : -a$ হয় $(a, b>0)$; প্রমাণ কর যে

$$y + x \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

5. প্রমাণ কর যে যদি ত্রিভুজের শীর্ষের স্থানাঙ্কগুলি যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মানও একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে। প্রতিপাদ্যটি কি যে কোনও বহুভুজের ক্ষেত্রে সত্য ? প্রতিপাদ্যটি কি বিপরীতক্রমেও সত্য ?

6. প্রমাণ কর যে এইরূপ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা অসম্ভব, যাহার শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্কগুলি সকলেই মূলদ সংখ্যা হইবে।

3

রেখার নতি বা প্রবণতা
(SLOPE OF A LINE)

3·1. সূচনা

কলন (Calculus) এবং বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতি (Analytic Geometry) উভয় বিষয়েই **নতি** (slope) বা **প্রবণতা** (gradient) সম্পর্কে ধারণা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। বর্তমান অধ্যায়ে সরলরেখার নতির ধারণার সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচিত করা হইবে। এই পুস্তকের শেষ অধ্যায়গুলিতে এবং কলন গ্রন্থেও এই ধারণার বিস্তৃতি ঘটাইয়া বক্ররেখার কোন-এক বিশেষ বিন্দুতে বক্ররেখার নতির সংজ্ঞা দেওয়া হইবে। বাস্তবিক পক্ষে ইহা অন্তর কলনের (Differential calculusএর) একটি মুখ্য প্রশ্ন (লেখকদ্বয়ের কলন গ্রন্থ (Calculus) দ্রষ্টব্য)।

3.2. কোন রেখার নতি কোণ এবং ইহার নতি বা প্রবণতা (The angle of inclination of a line and its slope)

ধরিয়া লওয়া হইল যে **একটি রেখা হইতে** অপর একটি **রেখা পর্যন্ত** ঘূর্ণনের সাহায্যে কোণ পরিমাপের প্রয়োগকৌশলের সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচয় হইয়াছে (সমতল ত্রিকোণমিতি—অনুচ্ছেদ 1·2·দ্রষ্টব্য)। বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে x এর ধনাত্মক অক্ষ **হইতে** y এর ধনাত্মক অক্ষের **অভিমুখে** ঘূর্ণনের অভিমুখকে **ধনাত্মক** অভিমুখ ধরা হইবে। নিম্নে সংজ্ঞা দেওয়া হইল :

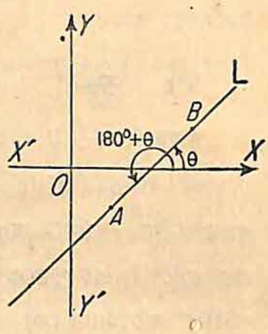
1. কোন সরলরেখার **নতি কোণ** (বা **নতি**) হইল, ধনাত্মক x-অক্ষ হইতে রেখাটির অভিমুখে ঐ রেখা পর্যন্ত ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ। বিশেষ সংজ্ঞা অনুসারে x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার নতি ধরা হইবে 0°.

2. **y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল নহে** এইরূপ কোন সরলরেখার **নতি** বা **প্রবণতা** (slope or gradient) হইল, রেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত যে কোণ θ উৎপন্ন করে তাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট। প্রবণতাকে সাধারণত m দ্বারা নির্দেশ করা হয়, যথা :

$$m = \tan \theta$$

চিত্র 3.1·হইতে ইহা স্পষ্ট যে L রেখার **নতি কোণ** হিসাবে দুইটি কোণ, যথা θ এবং $180^\circ + \theta$এর মধ্যে যে কোন একটিকে লওয়া যায়। কিন্তু যখন Lএর প্রবণতা

বিবেচ্য, দেখা যায় উহা অপরিবর্তিত থাকে, তা নতি কোণ হিসাবে θকেই লওয়া হউক আর $180^\circ+\theta$ কেই লওয়া হউক, কারণ $\tan\theta=\tan(180^\circ+\theta)$; অর্থাৎ, রেখার প্রবণতা **দিক-নির্দেশিত নহে এমন (undirected)** রেখার সহিত সম্পর্কযুক্ত। $\overrightarrow{AB}$র প্রবণতা এবং $\overrightarrow{BA}$ র প্রবণতা অভিন্ন।

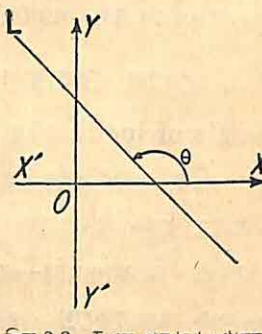


চিত্র 3.1. $\overrightarrow{AB}$র প্রবণতা = $\overrightarrow{BA}$র প্রবণতা

আরও বলা যাইতেছে যে

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার প্রবণতা শূন্য ($\because \tan 0^\circ=0$).

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার প্রবণতা সংজ্ঞাত (defined) নহে; ইহার নতি কোণ অবশ্য 90°; $\tan 90^\circ$ **অসংজ্ঞাত (undefined)** **(**ভবিষ্যতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলিকে প্রবণতা বিষয়ে সকল প্রকার আলোচনার বাহিরে রাখা হইবে)।



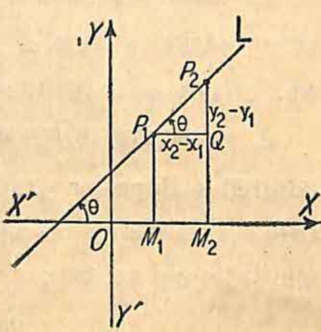
চিত্র 3.2. Lএর প্রবণতা ঋণাত্মক

(iii) নতিকোণ সূক্ষ্ম হইলে রেখাটির প্রবণতা ধনাত্মক হয় (চিত্র 3.1); যদি নতিকোণ স্থূলকোণ হয় তবে প্রবণতা ঋণাত্মক হইবে (চিত্র 3.2)।

3·3. কোন রেখার দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে রেখাটির প্রবণতা

প্রদত্ত : একটি রেখা L, যাহার নতিকোণ θ (চিত্র 3.3); সংজ্ঞা অনুসারে,

Lএর প্রবণতা $=\tan\theta=m$. মনে করা যাক, Lএর উপর অবস্থিত **যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$.**



চিত্র 3.3. রেখার প্রবণতা = ইহার উপর অবস্থিত অংশের প্রবণতা

ধরা যাক্ P_1 এবং P_2 এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। ত্রিভুজ P_1QP_2 (চিত্র 3.3) হইতে,

$$m=\tan\theta=\frac{\overline{QP_2}}{\overline{P_1Q}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

যদি $\overline{P_1P_2}$ এর পরিবর্তে $\overline{P_2P_1}$ লওয়া হইত, তাহা হইলে m এর মান হইত :

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2};$$

কিন্তু এই মান এবং (1) নির্দেশিত মান সমান। সুতরাং রেখাটি কোন এক অভিমুখে অথবা উহার বিপরীত অভিমুখে যেদিকেই নির্দেশিত হউক না কেন, m এর মান অপরিবর্তিত থাকে। এইজন্য দিক-নিরপেক্ষভাবে রেখার প্রবণতা হিসাবে mকে ধরা হয়।

সিদ্ধান্ত। L এর দুইটি বিন্দু জানা থাকিলেই L এর প্রবণতা জানা যায় এবং L এর প্রবণতা

$$=\frac{\text{বিন্দু দুইটির } y\text{-স্থানাঙ্কদ্বয়ের অন্তর}}{\text{বিন্দু দুইটির } x\text{-স্থানাঙ্কদ্বয়ের অন্তর}}.$$

ইহা হইতে নিম্নলিখিত তথ্যটি সহজেই পাওয়া যায়, যথা :

তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$\overline{AB}$র প্রবণতা $=\overline{AC}$র প্রবণতা।

3·4. সমান্তরাল এবং লম্ব রেখাসমূহ

1. যদি দুইটি রেখা সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের একই প্রবণতা হইবে এবং বিপরীতক্রমে, যদি দুই রেখার একই প্রবণতা হয়, তবে তাহারা সমান্তরাল।

ধরা যাক্, রেখা দুইটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ_1 এবং θ_2 নতি কোণ উৎপন্ন করে। যদি রেখা দুইটি সমান্তরাল হয়, তবে $\theta_1=\theta_2$, সুতরাং

$$\tan\theta_1=\tan\theta_2, \text{ অর্থাৎ, } m_1=m_2.$$

বিপরীতক্রমে, যদি $m_1=m_2$ হয়, তবে $\tan\theta_1=\tan\theta_2$ বা, $\theta_1=\theta_2$ এবং রেখা দুইটি সমান্তরাল।

2. **প্রদত্ত :** দুইটি পরস্পর লম্ব রেখা L_1, L_2, যাহাদের প্রবণতাদ্বয় যথাক্রমে $m_1=\tan\alpha_1$ এবং $m_2=\tan\alpha_2$; ধরা যাক্ L_1 ধনাত্মক প্রবণতার রেখা নির্দেশ করে (চিত্র 3.4)। তাহা হইলে চিত্র হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে

$$\alpha_2=90^\circ+\alpha_1$$

$$\therefore\ \tan\alpha_2=\tan(90^\circ+\alpha_1)=-\cot\alpha_1,$$

সুতরাং $\tan \alpha_2 \tan \alpha_1 = -1$

বা, $m_1 m_2 = -1.$

বিপরীতক্রমে, যদি $m_1 m_2 = -1$ হয়, তবে

$\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 + 1 = 0$

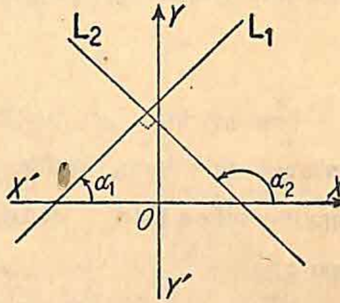
বা, $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = 0$

বা, $\cos (\alpha_2 \sim \alpha_1) = 0$

অর্থাৎ, $\alpha_2 \sim \alpha_1 = 90^\circ$

অর্থাৎ, রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব।

সুতরাং নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায়:



চিত্র 3.4. লম্ব রেখাদ্বয়: $m_1 m_2 = -1.$

প্রতিপাদ্য। যদি দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয়, তবে উহাদের একটির প্রবণতা অপরটির প্রবণতার ঋণাত্মক অন্যোন্যকের সমান, অর্থাৎ, উহাদের প্রবণতা দুইটির গুণফল -1; ইহা বিপরীতক্রমেও সত্য।

উদা. 1. যাচাই কর যে বিন্দুত্রয় $P_1 : (-1, 3)$, $P_2 : (0, 5)$ এবং $P_3 : (3, 1)$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

$$\overline{P_1P_2} \text{ এর প্রবণতা} = m_1 = \frac{5-3}{0+1} = 2.$$

$$\overline{P_1P_3} \text{ এর প্রবণতা} = m_2 = \frac{1-3}{3+1} = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$$

সুতরাং $\overline{P_1P_2} \perp \overline{P_1P_3}$ এবং $\triangle P_1P_3P_2$ সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার সমকোণ P_1 বিন্দুতে অবস্থিত। চিত্রটি অঙ্কন কর।

টীকা। দূরত্ব-বিষয়ক-সূত্রের সাহায্যেও ইহা সমাধান করা যায় (অনুচ্ছেদ 2·3)। বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে প্রায়ই ছাত্রছাত্রীদের কোন বিশেষ প্রশ্নের সমাধান বিভিন্ন পদ্ধতিতে করিতে বলা হইবে। প্রদত্ত ক্ষেত্রে পদ্ধতিগুলির পারস্পারিক গুণাগুণ তুলনা করিয়া তাহারা শীঘ্রই শ্রেষ্ঠ পদ্ধতিটি নির্বাচন করিতে শিখিবে।

উদা. 2. একটি গতিশীল বিন্দু $P : (x, y)$ সর্বদা $P_1 : (-1, 0)$ এবং $P_2 : (0, -2)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী অবস্থায় থাকে। এই তথ্যটি x এবং y এর মধ্যে একটি বীজগাণিতীয় সম্পর্কের সাহায্যে প্রকাশ কর।

$\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু M (চিত্র 3.5) P এর সকল অবস্থানে $\overline{MP}$, $\overline{P_1P_2}$ এর উপর লম্ব। M এর স্থানাঙ্কদ্বয় হইল $(-\frac{1}{2}, -1)$।

$\overline{MP}$ এর প্রবণতা $=\dfrac{y+1}{x+\frac{1}{2}}$

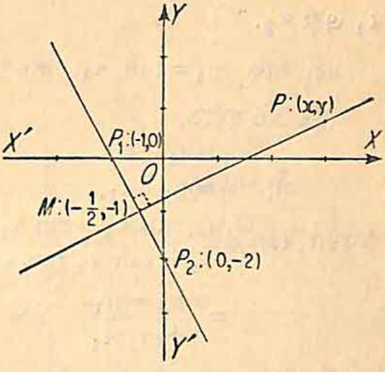
$\overline{P_1P_2}$ এর প্রবণতা $=\dfrac{-2-0}{0+1}=-2\cdot$

যেহেতু $\overline{MP} \perp, P_1P_2$, সুতরাং

$$\frac{y+1}{x+\frac{1}{2}}\times(-2)=-1$$

$$\text{বা, } 2x-4y-3=0$$

ইহাই নির্ণেয় বীজগাণিতীয় সম্পর্ক।



চিত্র 3.5

টীকা। এই প্রশ্নটিও দূরত্ব-বিষয়ক সূত্রের (অনুচ্ছেদ 2·3) সাহায্যে সমাধান করা যায়।

উদা. 3. প্রবণতার ধারণার সাহায্যে যাচাই কর যে বিন্দুত্রয়

A : (5, 7), B : (−3, 1) এবং C : (−7, −2) সমরেখ।

$$\overline{AB}\text{র প্রবণতা}=\frac{1-7}{-3-5}=\frac{3}{4}$$

$$\overline{AC}\text{র প্রবণতা}=\frac{-2-7}{-7-5}=\frac{3}{4}.$$

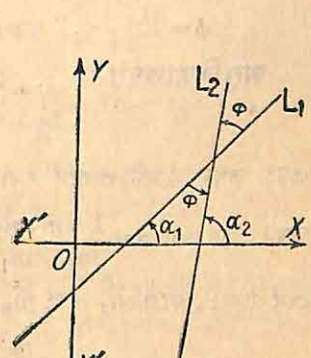
$\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ রেখাংশ দুইটি একই বিন্দু A গামী এবং উহাদের একই প্রবণতা। সুতরাং রেখাংশদ্বয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত,

অর্থাৎ, A, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

টীকা। প্রশ্নটি দূরত্ব-বিষয়ক-সূত্র (অনুচ্ছেদ 2·3) অথবা ক্ষেত্রফল-বিষয়ক সূত্রের (অনুচ্ছেদ 2·5) সাহায্যেও সমাধান করা যায়।

3·5. প্রবণতা জানা আছে এইরূপ দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ

L_1 রেখা **হইতে** L_2 রেখা **পর্যন্ত** কোণটি হইল সেই ক্ষুদ্রতম **ধনাত্মক** কোণ যে পরিমাণ কোণ দ্বারা L_1 রেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরাইতে হয়, যেন উহা L_2র সহিত সম্পূর্ণ মিলিত হইতে পারে। [3.6 এবং 3.7 চিত্রে ϕ কোণ]



চিত্র 3.6. L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণ

ϕ কে এইরূপ লওয়া হয় যেন

$$0^\circ\leqslant\phi\leqslant180^\circ.$$

ধরা যাক্ L_1, L_2 রেখাদ্বয়ের ধনাত্মক X-অক্ষের সহিত নতিকোণ যথাক্রমে α_1 এবং α_2.

ধরা যাক্ $m_1=\tan\alpha_1$, $m_2=\tan\alpha_2$.

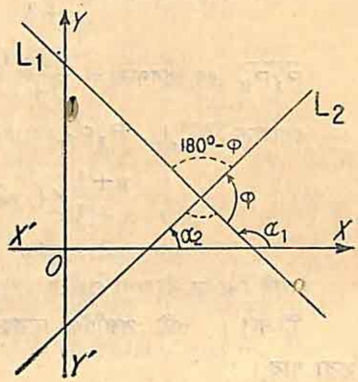
চিত্র 3.6 হইতে,

$$\alpha_2=\alpha_1+\phi$$

বা, $\phi=\alpha_2-\alpha_1$,

সুতরাং, $\tan\phi=\dfrac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}$

$$=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$



চিত্র 3.7. L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণ

চিত্র 3.7 হইতে,

$$\alpha_1=180^\circ-\phi+\alpha_2$$

বা, $\phi=180^\circ+(\alpha_2-\alpha_1)$

বা, $\tan\phi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$

$$=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}, \text{ (পূর্বের মত)}$$

সুতরাং এই সূত্র পাওয়া যায় :

m_1 প্রবণতার রেখা **হইতে** m_2 প্রবণতার রেখা **পর্যন্ত** কোণ ϕ হইলে

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে না যদি একটি রেখা, ধরা যাক্ L_2, y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয় (m_2 তখন অসংজ্ঞাত), কিন্তু এইরূপ ক্ষেত্রে

$$\phi=90^\circ-\alpha_1, \text{ সুতরাং } \tan\phi=\cot\alpha_1=1/m_1.$$

অনুসিদ্ধান্তদ্বয় : 1. রেখা দুইটি সমান্তরাল, যদি $m_2=m_1$ হয়।

2. রেখা দুইটি যদি সমকোণে অবস্থিত হয়, তবে $\phi=90^\circ$ এবং তখন সূত্রটি প্রয়োগ করা উচিত নহে ($\because$ $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞাত নহে)। সুতরাং তখন সূত্র $\cot\phi=\dfrac{1+m_1m_2}{m_2-m_1}$ বিবেচনা করা হয় এবং যদি $\phi=90^\circ$ হয়, তবে $\cot\phi=0$, ফলে m_1 এবং m_2 প্রবণতার রেখা দুইটির পরস্পর লম্ব হওয়ার সর্ত হইবে

$$m_1m_2=-1.$$

উদা. 4. A : (1, 1), B : (5, 2) এবং C : (4, 3) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলি নির্ণয় কর।

টীকা ! এইরূপ সংখ্যাগত প্রশ্নসমূহের ক্ষেত্রে ছাত্রছাত্রীদের চিত্রটি অঙ্কন করিতে বিশেষ পরামর্শ দেওয়া হইল।

ধরা যাক্, L_1, L_2, L_3 (চিত্র 3.8এ প্রদর্শিত) ত্রিভুজ উৎপন্নকারী রেখাগুলি নির্দেশ করে।

L_1 এর প্রবণতা = (ধরা যাক্)

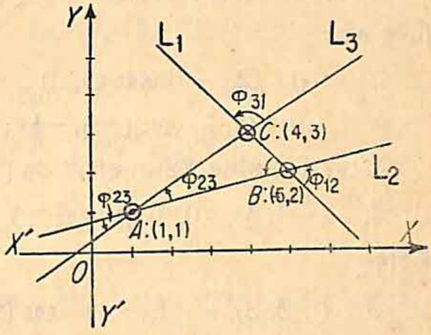
$$m_1=\frac{3-2}{4-5}=-1.$$

L_2 এর প্রবণতা =

(ধরা যাক্) $m_2=\dfrac{2-1}{5-1}=\dfrac{1}{4}.$

L_3 এর প্রবণতা =

(ধরা যাক্) $m_3=\dfrac{3-1}{4-1}=\dfrac{2}{3}.$



চিত্র 3.8. ত্রিভুজের অন্তস্থঃ কোণসমূহ

ধরা যাক্ L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণটি ϕ_{12} (ϕ এক দুই এইরূপ **পড়িতে হইবে**) দ্বারা নির্দেশিত হয়। তাহা হইলে

$$\tan\phi_{12}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}.$$

অনুরূপভাবে, $\tan\phi_{23}=\dfrac{5}{14}$ এবং $\tan\phi_{31}=-5$

ত্রিকোণমিতির তালিকার (Natural Tangents দ্রষ্টব্য) সাহায্যে ϕ_{12}, ϕ_{23}, ϕ_{31} এর প্রকৃত মানগুলি নির্ণয় করা যায়।

পরীক্ষা করিয়া দেখ : $\tan(\phi_{12}+\phi_{23})$

$$=\frac{\tan\phi_{12}+\tan\phi_{23}}{1-\tan\phi_{12}\tan\phi_{23}}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{14}}{1-\frac{25}{42}}=5=-\tan\phi_{31}$$

$$=\tan(180^\circ-\phi_{31})$$

$$\therefore\ \phi_{12}+\phi_{23}+\phi_{31}=180^\circ.$$

উদা. 5. অনুরূপ পদ্ধতিতে A : $(-3, -2)$, B : $(2, 5)$ এবং C : $(4, 2)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলি নিরূপণ কর।

[উঃ $A=24^\circ43'{\cdot}1$, $B=69^\circ13'{\cdot}6$, $C=86^\circ3'{\cdot}3$; ফলে $A+B+C=180^\circ$. (ত্রিকোণমিতির তালিকার সাহায্য লও)]

প্রশ্নমালা

(তৃতীয় অধ্যায়ের উপর)

1. যে রেখাগুলি নিম্নোক্ত বিন্দু-যুগলগুলি যুক্ত করে তাহাদের প্রবণতা নির্ণয় কর :

(*i*) (2, −5) এবং (5, 4) ; (*ii*) (−2, −7) এবং (−3, −1) ;
(*iii*) $(\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$ এবং $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$; (*iv*) $(-\frac{5}{4}, \frac{4}{3})$ এবং $(\frac{3}{4}, \frac{3}{5})$.

নিম্নের উক্তিগুলির সত্যতা যাচাই কর (প্রশ্ন 2—7) :

2. $(-1, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{5}{2})$ এবং $(5, \frac{5}{2})$ বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু।

3. (−3, 3). (−1, −1) এবং (3, −3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4. (−5, 1), (0, −7), (18, 9), (13, 15) বিন্দুগুলি হইল একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

5. যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু তুইটি (7, 2) এবং (−3, 2) তাহা (−1, 6) বিন্দু দিয়াও গমন করে।

6. (−3, 1) এবং (13, 3) এর সংযোজক রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক (7, −14) বিন্দু দিয়া গমন করে।

7. (−4, 0), (6, 3) এবং (36, 12) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

8. দেখাও যে (10, 10), (−14, −2), (−10, −10) এবং (4, −24) শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজটিকে তুইটি সমকোণী ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়। প্রমাণ কর যে ইহার ক্ষেত্রফল 400 বর্গএকক।

নিম্নলিখিত তথ্যগুলিকে বীজগাণিতীয় সমীকরণের আকারে প্রকাশ কর (প্রঃ 9 এবং প্রঃ 10) : (প্রবণতার ধারণার সাহায্য লও)

9. (x, y) বিন্দুটি (5, −2) এবং (−3, 4) হইতে সমদূরবর্তী।

[উঃ $4x-3y-1=0.$]

10. (x, y) বিন্দুটি একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত, যাহার একটি ব্যাস হইল (−3, 6) হইতে (2, 5) অভিমুখে **নির্দেশিত** এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ।

[উঃ $x^2+y^2+x-11y+24=0.$]

11. একটি রেখা L_1 (−5, −3) এবং (2, 6) বিন্দুগামী এবং অপর একটি রেখা L_2 (6, 4) এবং (8, 2) বিন্দুগামী। যদি L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণটি ϕ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\tan \phi = 8$.

12. 11নং প্রশ্নের অনুরূপ প্রশ্ন যেখানে L_1 (1, 9) এবং (2, 6) বিন্দুগামী ; L_2 (3, 3) এবং (−1, 5) বিন্দুগামী। প্রমাণ করিতে হইবে $\phi = \pi/4$.

13. যে ত্রিভুজের শীর্ষগুলি নিম্নোক্ত বিন্দুসমূহ, তাহার অন্তঃকোণগুলি নির্ণয় কর : (*i*) (−10, −8), (11, 6) এবং (37,23) ; (*ii*) (7, 12), (2, 5) এবং (−5, −5).

[উঃ (*i*) $\phi_{12} = \tan^{-1}\frac{7}{1749}$, $\phi_{23} = \tan^{-1}\frac{1}{203}$, $\phi_{31} = \tan^{-1}\frac{-1}{112}$

(*ii*) $\phi_{21} = \tan^{-1}\frac{1}{254}$, $\phi_{32} = \tan^{-1}\frac{1}{179}$, $\phi_{13} = \tan^{-1}\frac{-1}{105}$.]

14. A, B, C, D বিন্দুগুলি যথাক্রমে (−2, 0), (4, 3), (1, −1) এবং (5, 1) ; প্রমাণ কর যে $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

15. বিন্দু P : (x, y) এইরূপ একটি রেখার উপর অবস্থিত, যাহা (2, 3) বিন্দুগামী এবং (−1, 2) ও (−5, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর লম্ব ; দেখাও যে

$$2x - y - 1 = 0.$$

অঙ্কনসংক্রান্ত প্রশ্ন

16. বর্গাঙ্কিত ছক কাগজ লইয়া উহাতে রুলারের (ruler) সাহায্যে (−2, 3) বিন্দু দিয়া এরূপ একটি রেখা অঙ্কন কর যাহার প্রবণতা = −4 হইবে।

17. প্রশ্ন 16 এর অনুরূপ প্রশ্ন : রেখাটি (1, −2) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা = 3 হইবে।

4

সঞ্চারপথ (LOCUS) ঃ
সঞ্চারপথের সমীকরণ (EQUATION TO A LOCUS)

4·1. সূচনা

সঞ্চারপথের ধারণা **বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির** সর্বাপেক্ষা মৌলিক ধারণাগুলির অন্যতম ঃ কোন সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু যদি ঐ সমতলে এইরূপভাবে গতিশীল থাকে যে উহা সর্বদা এক বা একাধিক বিশেষভাবে উল্লিখিত জ্যামিতিক শর্ত পূরণ করিয়া চলে, তবে যে পথে উহা সঞ্চার বা বিচরণ করে তাহাকে উহার **সঞ্চারপথ** (locus) বলা হয়। বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে এই জ্যামিতিক শর্তটিকে সঞ্চার পথটির যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়—ইহাই **সঞ্চারপথটির সমীকরণ** (equation to the locus) উৎপন্ন করে। x এবং y কে তখন পথটির **সাধারণ স্থানাঙ্ক** (Current co-ordinates) বলা হয়। সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দু এই বীজগাণিতীয় সমীকরণকে অবশ্যই সিদ্ধ করিবে, কিন্তু সঞ্চারপথটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দু ইহাকে সিদ্ধ করে না। সঞ্চারপথের সমীকরণ কিরূপে পাওয়া যাইতে পারে তাহা এই অধ্যায়ে এখন আলোচনা করা হইবে।

4·2. সঞ্চার পথের সমীকরণ

প্রদত্ত ঃ একটি জ্যামিতিক সর্ত যাহার অধীনে একটি বিন্দু একটি সমতলে গতিশীল বলিয়া ধরা হইল। গতিশীল বিন্দুটির সমুদয় অবস্থানের সমাবেশ (assemblage) বিন্দুটির **সঞ্চারপথ** গঠন করে।

ধরা যাক্, গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থান হইল P বিন্দু। এক প্রস্থ নির্দিষ্ট অক্ষ লওয়া হইলে সেই অনুসারে P এর স্থানাঙ্ক, ধরা যাক, (x, y)। যে জ্যামিতিক শর্তাধীনে P গতিশীল, তাহার সাহায্যে x এবং y কে অন্তর্ভুক্ত করিয়া একটি বীজগাণিতীয় সম্বন্ধ পাওয়া যাইতে পারে। এই সম্বন্ধ **সঞ্চারপথটির সমীকরণ** প্রদান করে ঃ x এবং y **সাধারণ স্থানাঙ্ক** বলিয়া পরিচিত। সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু সম্বন্ধটি বজায় রাখে, কিন্তু যে বিন্দু সঞ্চারপথটির উপর অবস্থিত নহে, তাহা উহা বজায় রাখে না। দৃষ্টান্তস্বরূপ নিচের প্রশ্নটি বিবেচনা করা যাক্।

উদা. ঃ কোন বিন্দু একটি সমতলে এইরূপে সঞ্চার করে যে উহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A : $(3, 2)$ এবং B : $(-1, 5)$ হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী থাকে। গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

1. গতিশীল বিন্দুটির যে কোন একটি অবস্থান P বিবেচনা করা হইবে এবং ইহার স্থানাঙ্ক, ধরা লইল, (x, y).

2. এখানে জ্যামিতিক শর্তটি হইল : $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$.

3. স্থানাঙ্কসমূহের মাধ্যমে শর্তটি দাঁড়ায়

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$$

ইহাকে সরল করিয়া পাওয়া যায় : $8x-6y+13=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \textbf{(1)}$

সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু সমীকরণ **(1)** কে সিদ্ধ করে, কিন্তু যে বিন্দু সঞ্চারপথটির উপর নাই তাহা ইহাকে সিদ্ধ করিতে পারে না। সুতরাং সমীকরণ **(1)** হইল সঞ্চারপথটির নির্ণেয় সমীকরণ। পরবর্তী অধ্যায়ে দেখা যাইবে যে এই সঞ্চারপথটি একটি **সরলরেখা**।

প্রশ্নমালা

কোন বিন্দু P : (x, y) নিম্নে বর্ণিত শর্ত অনুসারে (প্রশ্ন 1—8) সঞ্চারণ করে। প্রতিক্ষেত্রে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর :

1. $(-4, -4)$ এবং $(2, 8)$ হইতে সমদূরবর্তী।
2. $(4, 0)$ হইতে P এর দূরত্ব $(9, 0)$ হইতে উহার দূরত্বের দুই-তৃতীয়াংশ।
3. $(-3, 0)$ হইতে P সর্বদা 2 একক দূরে থাকে।
4. $(0, 5)$ হইতে P এর দূরত্ব x-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দুই-তৃতীয়াংশ।
5. $(3, 2)$ হইতে P এর দূরত্ব y-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ।
6. $(0, a)$ এবং $(0, -a)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি $6a^2$.
7. $(4, 0)$ এবং $(-4, 0)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি 10.
8. $(2, 0)$ এবং $(-2, 0)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের অন্তর 2.

প্রশ্ন 9—11 এর ক্ষেত্রে A ; $(a, 0)$ এবং B : $(-a, 0)$ দুইটি স্থির বিন্দু ; গতিশীল বিন্দু P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

9. $PA^2 - PB^2 = 2k^2$ (k একটি ধ্রুবক রাশি).
10. $PA = n. PB$ (n একটি ধ্রুবক).
11. $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$, যেখানে C হইল $(c, 0)$ বিন্দু।

12. একটি স্থির সরলরেখা হইতে একটি স্থির বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব k এবং একটি বিন্দু এইভাবে গতিশীল আছে যে স্থির বিন্দুটি হইতে উহার দূরত্ব, স্থির সরলরেখাটি হইতে উহার দূরত্বের সহিত সমান। প্রমাণ কর যে গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+2ky=k^2$ ভাবে লেখা যায়।

সঙ্কেত : স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে স্থির বিন্দুগামী কর এবং উহাদের একটিকে প্রদত্ত রেখার সহিত সমান্তরাল এবং অপরটিকে উহার উপর লম্বভাবে লও।

13. দুইটি বিন্দু O : (0, 0) এবং A : (3, 4) প্রদত্ত আছে। যদি $\triangle$OAB এর ক্ষেত্রফল 7 বর্গ একক হয়, যেখানে শীর্ষগুলিকে এই ক্রমে লওয়া হইয়াছে, তবে Bএর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. P একটি চল বিন্দু $(t+3,\ 2t-1)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে। P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সঙ্কেত : লিখ $x=t+3$, $y=2t-1$; t অপনয়ন কর, তাহা হইলেই x এবং y এর মাধ্যমে সঞ্চারপথটির সমীকরণ পাইবে।

15. P একটি চল বিন্দু $(at^2, 2at)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে ; দেখাও যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ $y^2=4ax$.

16. P একটি গতিশীল বিন্দু $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, যেখানে θ যে কোন মান গ্রহণ করিতে পারে ; দেখাও যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

17. প্রশ্ন নং 15 অথবা 16 'র অনুরূপ প্রশ্ন : ধর P : $\left(t+\frac{1}{t},\ t-\frac{1}{t}\right)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে ; প্রমাণ কর যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$x^2-y^2=4.$$

উত্তরমালা

1. $x+2y=3$, 2. $x^2+y^2=36$. 3. $x^2+y^2+6x+5=0$,
4. $9x^2+5y^2-90y+225=0$. 5. $3x^2-y^2+6x+4y-13=0$
6. $x^2+y^2=2a^2$, 7. $9x^2+25y^2=225$. 8. $x^2-3y^2=3$.
9. $2ax+k^2=0$, 10. $(n^2-1)(x^2+y^2+a^2)+2ax(n^2+1)=0$
11. $(6a-2c)x=a^2-c^2$ 13. $4x-3y+14=0$ 14. $2x-y-7=0$.

5

সরলরেখা ঃ বিভিন্ন আকারে ইহার সমীকরণ
(THE STRAIGHT LINE : ITS EQUATIONS IN DIFFERENT FORMS)

5·1. সূচনা

এই অধ্যায়ের প্রধান উদ্দেশ্য, সরলরেখার সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে বিধিবদ্ধ করা। ইহা প্রমাণিত হইবে যে, যে কোন সরলরেখাকে দুইটি চলরাশি x এবং y এর একঘাত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। বিপরীতক্রমে, এইরূপ যে কোন সমীকরণ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে। এইজন্য এইরূপ সমীকরণকে **সরল (linear) সমীকরণ** বলা হয়।

5·2. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা

1. কোন সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে ইহার সমীকরণের আকার হইবে : $x=k$, যেখানে k হইল y অক্ষ হইতে রেখাটির **দিক-নির্দেশিত (directed) দূরত্ব**।

বিপরীতক্রমে, এই আকারের যে কোন সমীকরণ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

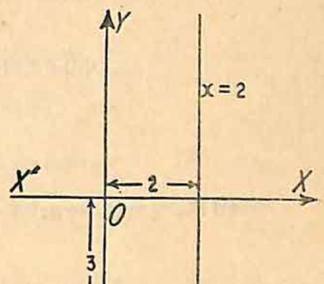
ইহার কারণ, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাটির উপরিস্থিত সকল বিন্দুর একই ভুজ k ; সুতরাং রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ এর ক্ষেত্রে $x=k$.

বিপরীতক্রমে, এইরূপ যে কোন সমীকরণ কেবল সেই বিন্দুগুলিকে নির্দেশ করে যাহারা y-অক্ষ হইতে দিক-নির্দেশিত k দূরত্বে অবস্থিত ; এই বিন্দুগুলি যে সঞ্চারপথ গঠিত করে তাহা y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা। অনুরূপভাবে,

2. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে দিক্-নির্দেশিত l দূরত্বে অবস্থিত রেখার সমীকরণ

$$y=l.$$

লক্ষ্য করিতে হইবে যে k বা l দিক-নির্দেশিত দূরত্ব হওয়ায় ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে। চিত্র 5.1 এ $x=2$ রেখা (y-অক্ষের সমান্তরাল) এবং $y=-3$ রেখা (x-অক্ষের সমান্তরাল) কে দেখা যাইবে।



চিত্র 5.1

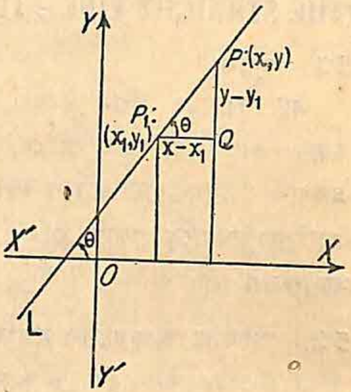
3. $x=0$, $y=0$ হইল যথাক্রমে y-অক্ষ এবং x-অক্ষের সমীকরণ।

5·3. বিন্দু-প্রবণতা আকার (Point-slope form)

I. যে সরলরেখা $P_1 : (x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং যাহার প্রবণতা m, তাহার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

টীকা। যদি সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে উহার m অসংজ্ঞাত ; সুতরাং উহাকে এই আকারের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।



চিত্র 5.2—বিন্দু প্রবণতা আকার

প্রমাণ। ধরা যাক, সরলরেখা L ধনাত্মক x অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে ইহার

প্রবণতা $m = \tan\theta$

রেখাটির উপর **যে কোন** বিন্দু P লওয়া হইল এবং ধরা হইল, ইহার স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y)। তাহা হইলে

$\overline{P_1P}$ এর প্রবণতা

$$= \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

[চিত্র 5.2 হইতে, $\tan\theta = \frac{QP}{P_1Q} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

রেখাটির প্রবণতা = রেখাটির যে কোন অংশের প্রবণতা,

$$\therefore \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

সুতরাং, $y - y_1 = m(x - x_1)$ → **রেখাটির সমীকরণের বিন্দু-প্রবণতা আকার**

রেখাটির যে কোন বিন্দু P এর পক্ষে এই সম্পর্ক সত্য এবং রেখাটির উপর অবস্থিত নহে এইরূপ কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে **সত্য নহে**।

সুতরাং ইহাই রেখাটির সমীকরণ।

টীকা। (x_1, y_1) গামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ

$$y = y_1 \quad (\because \text{ এখানে } m = 0)$$

উদা. 1. (4, 1) এবং (2, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর লম্ব এবং (2, −3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(4, 1) এবং (2, 4) এর সংযোজক রেখার প্রবণতা $=\frac{4-1}{2-4}=\frac{-3}{2}$

নির্ণেয় রেখাটি ইহার উপর লম্ব, সুতরাং ইহার প্রবণতা $=\frac{2}{3}$.

∴ রেখাটির [(2, −3) বিন্দুগামী এবং প্রবণতা = 2/3] নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y+3=\tfrac{2}{3}(x-2)$$

বা, $3y-2x+13=0.$

উদা. 2. যে রেখা (4, −8) বিন্দুগামী এবং ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত 135° কোণে নত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে $m=\tan 135°=-1$; সুতরাং (4, −8) বিন্দুগামী এবং −1 প্রবণতার রেখাটির সমীকরণ হইল

$$y+8=-1(x-4)$$

বা, $x+y+4=0$

অনুশীলনী। নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহে সরলরেখাগুলির সমীকরণগুলি লিখ :

(*i*) ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত এবং (5, −2) বিন্দুগামী।

(*ii*) এমন কোণে নত যাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট হইল 3/4 এবং (2, 6) বিন্দুগামী।

(*iii*) যখন প্রবণতা −4/5 এবং (−2, 4) বিন্দুগামী।

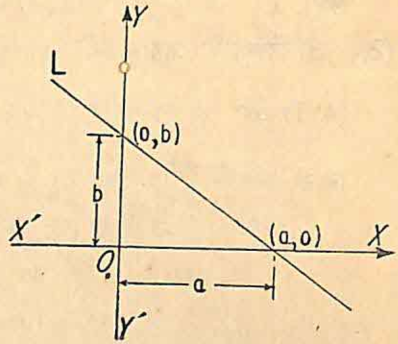
(*iv*) যখন প্রবণতা m এবং $(0, a\sqrt{1+m^2})$ বিন্দুগামী।

[উত্তর : (*i*) $y-\sqrt{3}x+2+5\sqrt{3}=0$; (*ii*) $4y-3x=18$;
(*iii*) $5y+4x-12=0$ (*iv*) $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$.

5·4. প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার (Slope-intercept form)

যদি কোন সরলরেখা y-অক্ষকে কোন $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে (b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে), তখন **বলা হয় যে রেখাটির y-ছেদিতাংশ হইল b।** সুতরাং কোন রেখার y-ছেদিতাংশটি হইল, মূলবিন্দু হইতে রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু পর্যন্ত **দিক-নির্দেশিত** দূরত্ব। x-ছেদিতাংশের সংজ্ঞাও অনুরূপ, কেবল এক্ষেত্রে 'y-অক্ষে'র স্থলে 'x-অক্ষ' বলিতে হইবে।

চিত্র 5.3 এ L রেখার x-ছেদিতাংশ a এবং y-ছেদিতাংশ b দেখা যাইবে।

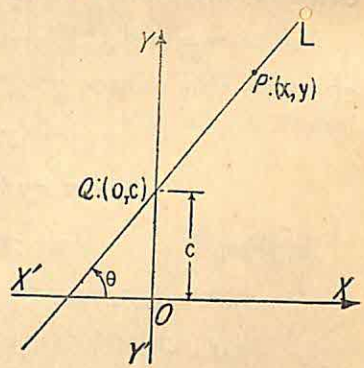


চিত্র 5.3. অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ

II. যে সরলরেখার প্রবণতা m এবং y-ছেদিতাংশ c, তাহার সমীকরণের আকার হইল :

$y=mx+c$ →প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার

প্রমাণ। ধরা যাক্, L রেখা y-অক্ষকে Q (চিত্র 5.4) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে Q এর স্থানাঙ্কদ্বয় $(0, c)$ কারণ y-ছেদিতাংশ c. রেখাটির উপর যে কোন বিন্দু P : (x, y) লওয়া হইল।



চিত্র 5.4. প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার

$\overline{QP}$ এর প্রবণতা $=\dfrac{y-c}{x-0}$

কিন্তু রেখাটির প্রবণতা $=m$

$$\therefore \quad m=\frac{y-c}{x}$$

বা, $y=mx+c$;

ইহা এমন একটি সম্বন্ধ যাহা রেখাটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর পক্ষে সত্য এবং রেখাটির বাহিরে অবস্থিত বিন্দুর পক্ষে সত্য নহে। সুতরাং ইহাই রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ।

টীকা 1. y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার ক্ষেত্রে এই সূত্রের প্রয়োগ করা যাইবে না। ($\because$ $m\rightarrow$সংজ্ঞাত নহে)।

টীকা 2. বিন্দু-প্রবণতা আকার হইতে এই আকারটি সরাসরি পাওয়া যায়, যেমন, এখানে একটি বিন্দু Q : $(0, c)$ এবং প্রবণতা m বলিয়া সমীকরণটি

$$y-c=m(x-0), \quad \text{বা}, \quad y=mx+c.$$

টীকা 3. সমীকরণটিতে দুইটি ধ্রুবক রহিয়াছে, যথা m এবং c ; সুতরাং যদি দুইটি শর্ত প্রদত্ত হয় যাহারা রেখাটিকে সিদ্ধ করে, তবে রেখাটির সমীকরণটি নির্ণয় করা যাইবে। নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণগুলি দ্রষ্টব্য :

উদা. 3. (3, 4) এবং (8, -15) বিন্দু দুইটি দিয়া যে রেখা গমন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক্‌, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=mx+c,$$

যেখানে m ও c ধ্রুবক এবং এই বিশেষ ক্ষেত্রে উহাদের মান নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু (3, 4) এবং (8, -15) বিন্দুদ্বয় রেখাটির উপর অবস্থিত, সুতরাং

$$4=3m+c$$

$$-15=8m+c,$$

যাহা হইতে, $m=-19/5$ এবং $c=77/5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{19}{5}x+\frac{77}{5}$$

বা, $5y+19x=77.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। যেহেতু নির্ণেয় রেখাটির দুইটি বিন্দু হইল (3, 4) এবং (8, -15),

সুতরাং রেখাটির প্রবণতা $=\dfrac{-15-4}{8-3}=-\dfrac{19}{5}.$

যেহেতু রেখাটি (3, 4) বিন্দুগামী, সুতরাং বিন্দু-প্রবণতা আকার হইতে নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y-4=-\tfrac{19}{5}(x-3)$$

বা, $5y+19x=77.$

তৃতীয় পদ্ধতি। পরবর্তী অনুচ্ছেদে দুইটি প্রদত্ত বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয়ের একটি সূত্র বিধিবদ্ধ করা হইবে। সূত্রটি এই ক্ষেত্রে সরাসরি প্রয়োগ করা যায়।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য :

যদি m এবং c দুইটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক হয়, তবে সমীকরণ $y=mx+c$ একটি **বিশেষ রেখাকে** নিরূপিত করে। কিন্তু যদি m একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক (fixed constant) অথচ c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (arbitrary constant) হয়, তবে $y=mx+c$ প্রকাশ করে সমান্তরাল রেখাসমূহের একটি সেট্‌ (a system of parallel lines) কে, যাহাদের একই প্রবণতা m (কেবল c বিভিন্ন রেখার ক্ষেত্রে বিভিন্ন)।

এখন ছাত্রছাত্রীদের নিম্নের প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তর দিতে আহ্বান করা যাইতেছে :

প্রঃ নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে $y=mx+c$ সমীকরণ কি প্রকাশ করে ?

(i) যখন $m=0$ এবং c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(ii) যখন $c(\neq 0)$ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু m একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(iii) যখন $c=0$ এবং m একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(iv) যখন $m(\neq 0)$ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং c ও একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(v) যখন m এবং c উভয়েই অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

5·5. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখা

III. দুইটি প্রদত্ত বিন্দু A : (x_1, y_1) এবং B : (x_2, y_2) দিয়া যে সরলরেখা গমন করে, তাহার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

প্রমাণ : ধরা যাক্ P : (x, y) রেখাটির যে কোন বিন্দু।

$$\overline{AB} \text{ এর প্রবণতা}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$\overline{AP} \text{ এর প্রবণতা}=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

উভয়েই একই রেখার অংশ হওয়ায় এই প্রবণতা দুইটি অবশ্যই সমান ; সুতরাং

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$\text{বা, } y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

টীকা। যদি প্রদত্ত বিন্দু দুইটির একই ভুজ হয় $(x_1=x_2)$, তবে সমীকরণটির এই আকার প্রয়োগ করা যাইবে না, কারণ তখন $x_1-x_2=0$ এবং শূন্য দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞাত। লক্ষণীয় যে $x_1=x_2$ হয়, যখন রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণকে উপরে প্রদত্ত আকারে লিখিতে পারা যায় না।

IIIএর আকারের বিকল্প একটি আকার হইল

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$$

$$\text{বা, } x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$$

ছকের (determinant) আকারে প্রকাশ করিলে সমীকরণটি হইবে

$$\text{IV}\rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

এই আকার (IV)কে সহজেই এই তথ্য হইতে নিরূপণ করা যায় যে, বিন্দু (x, y), নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সহিত শূন্য ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে, যেহেতু বিন্দু তিনটি একই রেখার উপর অবস্থিত।

ইহা কৌতূহলের বিষয় যে **(III)** আকারটিকে যদিও y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয়ে প্রয়োগ করা যায় না, **(IV)** আকারটিকে কিন্তু প্রয়োগ করা যায়, তা রেখাটি যদি y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তাহা হইলেও; কারণ **(IV)** এ $x_1=x_2$ ধরিয়া সরল করিলে অবশেষে $x=x_1$ পাওয়া যাইবে, যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা।

অনুশীলনী

1. নিম্নের বিন্দুগুলির সংযোজক রেখাসমূহের সমীকরণগুলি লিখ :

(*i*) (0, 0) এবং (5, −3) ; (*ii*) (5, −3) এবং (5, 2) ;

(*iii*) (−5, 2) এবং (3, 2) ; (*iv*) (−4, 1) এবং (3, −5) ;

(*v*) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ এবং $\left(\frac{a}{4m^2}, \frac{a}{m}\right)$; (*vi*) (a, b) এবং (b, a) ;

(*vii*) $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ এবং $\left(2\,ct, \frac{c}{2t}\right)$.

2. (−5, 6), (−1, −4) এবং (3, 2) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলির (বর্ধিত) সমীকরণ নির্ণয় কর। ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণও নিরূপণ কর।

3. দেখাও যে সমীকরণ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

কে x এবং y এর একঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করা যায়।

[উঃ 1. (*i*) $3x+5y=0$; (*ii*) $x=5$; (*iii*) $y=2$; (*iv*) $6x+7y+17=0$;

(*v*) $3y=4mx+\frac{2a}{m}$; (*vi*) $x+y=a+b$;

(*vii*) $x+2t^2y=3ct$.

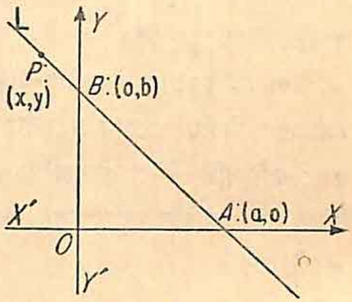
2. $2y+5x+13=0$; $2y-3x+5=0$; $2y+x-7=0$.

$6y-x-9=0$; $6y+7x-1=0$; $x=-1$.]

5·6. ছেদিতাংশ আকার (Intercept form)

V. যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ শূন্য নহে অথচ সসীম এবং যাহার x-ছেদিতাংশ ও y-ছেদিতাংশ যথাক্রমে a এবং b, উহার সমীকরণের আকার হইবে :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a, b \neq 0)$$



চিত্র 5.5. ছেদিতাংশ আকার

প্রমাণ। ধরা যাক্, L সরলরেখা x-অক্ষকে A : $(a, 0)$ এবং y-অক্ষকে B : $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে, যাহাতে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ a এবং b উৎপন্ন হয় (চিত্র 5.5)।

ধরা যাক্, L রেখার উপর P যে কোন বিন্দু এবং P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।

$$\overline{AP} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{y-0}{x-a}$$

$$\overline{AB} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{b-0}{0-a}$$

$\therefore \ \frac{y}{x-a}=-\frac{b}{a}$, বা, $ay+bx=ab$, যাহাকে ab দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \longrightarrow \text{ছেদিতাংশ আকার।}$$

টীকা **1.** যদি $a=0$ বা, $b=0$ হয়, তবে এই আকারের সাহায্যে রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে না। রেখাটি যে কোন অক্ষের সমান্তরাল হইলেও ছেদিতাংশ আকার প্রয়োগ করা যাইবে না (a অথবা b তখন অসংজ্ঞাত)

টীকা **2.** কিন্তু ছেদিতাংশ আকারে প্রদত্ত রেখাটিকে অংকিত করা সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক ; যেমন $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ রেখাটিকে অংকিত করিতে $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দু দুইটি লইয়া উহাদের মধ্য দিয়া রেখাটিকে লইয়া যাইলেই হইল।

উদা. 3. (4, 3) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের উপর এইরূপ দুইটি ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে যাহারা দৈর্ঘ্যে সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ দুইটিও নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, প্রত্যেক ছেদিতাংশ $=a$ (a ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক)

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1.$$

কিন্তু, (4, 3) বিন্দুটি রেখাটির উপর অবস্থিত,

সুতরাং, $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$; বা, $a=7=$ **প্রত্যেক ছেদিতাংশ**

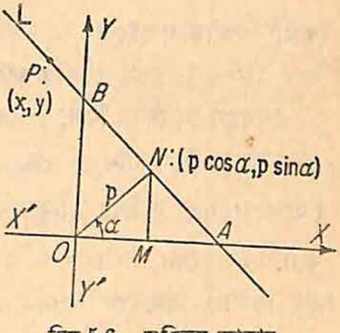
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x+y=7.$$

5·7. অভিলম্ব বা লম্ব-আকার (Normal form)

VI. যে রেখার মূলবিন্দু **হইতে** রেখাটি **অবধি** লম্ব দূরত্ব p এবং সেই ক্ষেত্রে লম্বটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা α, সেই রেখার সমীকরণ নিম্নপ্রকার আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p.$$



চিত্র 5.6. অভিলম্ব-আকার

প্রমাণ। চিত্র 5.6 এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে। ধরা যাক্, রেখাটি L, যাহার সমীকরণ নির্ণেয়। ধরা যাক্, $\overline{ON}$ হইল মূলবিন্দু হইতে L রেখা অবধি লম্ব-দূরত্ব। মনে করা হইল, $\overline{ON}=p$, এবং $\widehat{XON}=\alpha$; ধরা যাক্, P : (x, y) রেখা L এর উপর যে কোন বিন্দু।

লক্ষ্য করা যায় যে N এর পোলার বা মেরু (polar) স্থানাঙ্ক : (p, α), যেখানে পোল বা মেরু (pole) হইল O এবং প্রারম্ভিক রেখা $\overrightarrow{OX}$. N এর কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক হইল $p \cos \alpha=\overline{OM}$ এবং $p \sin \alpha=\overline{MN}$.

স্পষ্টত $\overline{ON}$ এর প্রবণতা $=\tan \alpha$,

সুতরাং $\overline{ON}$ এর লম্ব রেখা L এর প্রবণতা

$$=-\frac{1}{\tan \alpha}=-\cot \alpha.$$

এখন বিন্দু-প্রবণতা আকার অনুসারে L রেখার সমীকরণটি হইল

$$y-p \sin \alpha=-\cot \alpha\ (x-p \cos \alpha)$$

$$=-\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}(x-p \cos \alpha)$$

বা, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = p.$

$\therefore$ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ → রেখাটির অভিলম্ব বা লম্ব-আকারের সমীকরণ।

রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে এবং রেখাটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দুর পক্ষে ইহা সত্য নহে। সুতরাং ইহাই রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ।

p এর চিহ্ন সম্পর্কে প্রচলিত রীতি :

রেখাটির সকল অবস্থানে p কে **ধনাত্মক** ধরা হইবে।

টীকা 1. ইহা সহজেই নিরূপণ করা যায় যে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ ছেদিতাংশদ্বয় (চিত্র 5.6) হইল যথাক্রমে $p \sec \alpha$ এবং $p \operatorname{cosec} \alpha$. সুতরাং ছেদিতাংশ-আকারের সাহায্যে L রেখার সমীকরণ হয়

$$\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

$$\text{বা, } \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

টীকা 2. চিত্র 5.6 হইতে ইহা নিরূপণ করা যায় যে L রেখার মেরু বা পোলার সমীকরণ হইবে

$$r \cos(\theta - \alpha) = p,$$

যেখানে যে কোন বিন্দু p এর মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

টীকা 3. যদি p এবং α জ্ঞাত হয়, তবে সরলরেখাটি সম্পূর্ণ নির্ণীত হয় (সুতরাং উহাকে চিত্রে অঙ্কিত করা যায়)। ধনাত্মক x-অক্ষ হইতে α কোণ পরিমাপ করা হইল যেন $\widehat{XON} = \alpha$. $\overline{CN} = p$ ছিন্ন করিয়া লইয়া এখন N এর মধ্য দিয়া $\overline{CN}$ এর উপর লম্ব রেখা অঙ্কন করিলে নির্ণেয় রেখা পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নের প্রতিটি রেখা অঙ্কন কর, যেখানে

(i) $p=5, \alpha=30^\circ$; (ii) $p=4, \alpha=240^\circ$;

(iii) $p=5, \alpha=315^\circ$; (iv) $p=6, \alpha=120^\circ$.

এই রেখাগুলির সমীকরণসমূহ লম্ব-আকারে লিখ।

5·8. x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ (The General Equation of first degree in x and y)

x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণটিকে এই আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax + by + c = 0,$$

যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং **a ও b এর উভয়েই শূন্য নহে।**

প্রতিপাদ্য 1. সমতলস্থ যে কোন রেখার সমীকরণ হইল x এবং y সংশ্লিষ্ট নিম্নলিখিত আকারের প্রথম ঘাতের সমীকরণ, যথা :

$$ax+by+c=0 \text{ (} a, b \text{ এর উভয়েই শূন্য নহে)}$$

প্রমাণ : এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ কোন সমতলের উপর স্থাপন করা হইল।

ক্ষেত্র. 1. ধরা যাক, সমতলটিতে L কোন একটি রেখা, যাহা অক্ষদ্বয়ের কোনটিরই সহিত সমান্তরাল নহে। ইহা জানা আছে যে রেখাটি সম্পূর্ণ নির্ণীত হইবে, যখন রেখাটির উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দু, মনে করা যাক্ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) প্রদত্ত থাকিবে। এইরূপ রেখার সমীকরণ হইল

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$$

বা, $y(x_2-x_1)+x(y_1-y_2)-x_2y_1+x_1y_2=0$;

ইহাকে নিম্নের আকারে লেখা যায় :

$$ax+by+c=0,$$

যেখানে $a=y_1-y_2$, $b=x_2-x_1$ এবং $c=x_1y_2-x_2y_1$.

ক্ষেত্র. 2. ধরা যাক্, L রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল। তখন উহার সমীকরণের আকার $y=y_1$: ইহা $ax+by+c=0$ এরই বিশেষ আকার, যেখানে $a=0, b=1$ এবং $c=-y_1$.

ক্ষেত্র. 3. ধরা যাক্, L রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল। উহার সমীকরণের আকার তখন $x=x_1$: ইহাও $ax+by+c=0$ এর একটি বিশেষ ক্ষেত্র, যেখানে $a=1$, $b=0$ এবং $c=-x_1$.

x-অক্ষ এবং y-অক্ষ আবার ক্ষেত্র 2 এবং ক্ষেত্র 3 এর যথাক্রমে বিশেষ ক্ষেত্র ($y=0$, $x=0$)।

সুতরাং কোন সমতলস্থ যে কোন রেখার সমীকরণের আকার হইল

$$ax+by+c=0.$$

এখন বিপরীত প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করা যাক্।

প্রতিপাদ্য 2. x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ, যথা :

$ax+by+c=0$ (যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং a, b উভয়েই শূন্য নহে) … (1)

সর্বদা সমতলস্থ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

প্রমাণ :

ক্ষেত্র. 1. ধরা যাক, $b\neq0$; তাহা হইলে সমীকরণ (1)কে এইভাবে লিখিতে পারা যায় : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

ইহা সরলরেখার প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারের সমীকরণ, যেখানে প্রবণতা হইল $-a/b$ এবং y-ছেদিতাংশ $-c/b$.

যদি $a=0$ হয়, তবে তখন সমীকরণটির আকার হয় $y=-c/b$ অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

যদি $a=0$, আবার $c=0$ হয়, তবে সমীকরণটি x-অক্ষকেই প্রকাশ করে।

ক্ষেত্র. 2. ধরা যাক্ $b=0$; সমীকরণ (1)এর হ্রাসপ্রাপ্ত আকার তখন

$$ax+c=0.$$

এখন a শূন্য হইতে পারে না, কারণ তখন a এবং b উভয়েই শূন্য (bকে প্রথমেই শূন্য ধরা হইয়াছে)।

$$\text{সুতরাং} \quad x=-\frac{c}{a}.$$

ইহা y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, যদি $c \neq 0$ হয়; এবং y-অক্ষই, যদি $c=0$ হয়।

সুতরাং সম্ভাব্য সকল ক্ষেত্রেই, $ax+by+c=0$ (a, b উভয়েই শূন্য নহে) একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

টীকা 1. $ax+by+c=0$ এর নাম **রৈখিক সমীকরণ** (linear equation) প্রতিপাদ্য 1 এবং 2 এর লব্ধ ফল, এই সত্যটিকে সমর্থন করে।

টীকা 2. যদি $c=0$, হয়, তবে $ax+by+c=0$ রেখা মূলবিন্দুগামী একটি রেখাকে প্রকাশ করে।

যদি $c \neq 0$ হয়, তবে সমীকরণটিকে এই আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y=1$$

বা, $lx+my=1$; ইহা মূলবিন্দুগামী নহে এমন একটি সরলরেখা।

$ax+by+c=0$কে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ (Reduction of $ax+by+c=0$ into different forms) :

1. **প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : ইহা সম্ভব যদি কেবল $b \neq 0$ হয়**

$$by=-ax-c$$

$$\text{বা,} \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \quad (\text{প্রবণতা}=-a/b, \quad y\text{-ছেদিতাংশ}=-c/b)$$

2. **ছেদিতাংশ আকার :** ইহা সম্ভব কেবল যদি $c \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$ax + by = -c$$

বা $$\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$$

(x-ছেদিতাংশ $= -c/a$, y-ছেদিতাংশ $= -c/b$)।

মন্তব্য : রেখাটি অঙ্কনের পক্ষে ইহা সুবিধাজনক আকার।

3. **অভিলম্ব-আকার :**

নিম্নের উক্তিটি যথার্থ বলিয়া ধরিয়া লওয়া হইল :

দুইটি প্রথমঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ, যথা : $ax+by+c=0$ **এবং** $a'x+b'y+c'=0$ **একই সরলরেখাকে প্রকাশ করে যদি এবং কেবলমাত্র যদি**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ হয়।}$$

$ax+by+c=0$ আকারের সমীকরণকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ করিবার জন্য নিম্নপ্রকারে অগ্রসর হইতে হইবে :

(*i*) **ধরা যাক্ c ধনাত্মক।** সমীকরণটিকে এখন এইভাবে লেখা যায় :

$$c = -ax - by$$

এবং ধরিয়া লওয়া হইল যে এই রেখা এবং

$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ (p সর্বদা ধনাত্মক লওয়া হয়) রেখা একই রেখা।

তাহা হইলে $$\frac{c}{p} = \frac{-a}{\cos\alpha} = \frac{-b}{\sin\alpha} = \frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = \frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{1}$$

সুতরাং, $$\cos\alpha = \frac{-a}{+\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{-b}{+\sqrt{a^2+b^2}},\ p = \frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\therefore$ অভিলম্ব আকারে সমীকরণটি এখন হইল

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-ax}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

অর্থাৎ এই আকারবিশিষ্ট অবস্থায় ইহা

$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ এর সমতুল, যেখানে

$p = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং যেখানে α নিরূপণ করা হয়

$\cos\alpha = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\sin\alpha = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ সমীকরণদ্বয় হইতে।

(*ii*) **ধরা যাক্ c ঋণাত্মক।** তাহা হইলে নির্ণেয় অভিলম্ব-আকার এইভাবে প্রাপ্তব্য, যথা :

$$-c=ax+by$$

প্রত্যেককে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করা হইল ; তাহা হইলে

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$

ইহা নিম্নের সমীকরণের সহিত সমতুল, যথা :

$$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$

যেখানে

$$p=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ এবং α নিরূপিত হয়

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ এবং $$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ সমীকরণদ্বয় হইতে।

মন্তব্য। ক্ষেত্র দুইটি এইভাবে বিন্যস্ত হইয়াছে যেন p সর্বদা ধনাত্মক থাকে। ইহা করা হইয়াছে p এর চিহ্ন সম্পর্কে প্রচলিত রীতি (অনুচ্ছেদ 5·7) অনুসারে। আর একবার স্মরণ করাইয়া দেওয়া প্রয়োজন যে p হইল মূলবিন্দু **হইতে** রেখা **পর্যন্ত** লম্ব দূরত্ব।

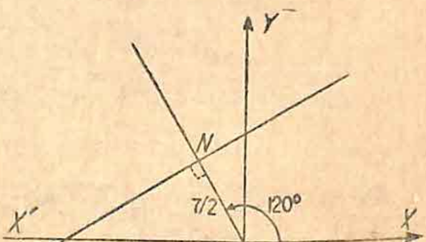
উদা. 5. $x-y\sqrt{3}+7=0$ সমীকরণটিকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ কর। মূলবিন্দু হইতে রেখাটি পর্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য (p) নির্ণয় কর। এই লম্ব-রেখা যদি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত α কোণ উৎপন্ন করে, তবে α নির্ণয় কর। p এবং α র মানের সাহায্যে রেখাটি অঙ্কন কর।

এখানে $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$; ধ্রুবক পদ (7) ধনাত্মক। সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি এইভাবে লিখিত হইল, যথা :

$$\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

ইহাই অভিলম্ব-আকার, যাহা নিম্নের সমীকরণের সমতুল, যথা:

$$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$



চিত্র 5.7

যেখানে $p=\frac{7}{2}$, এবং যেখানে α নির্ণীত হইবে

$$\cos\alpha=-\tfrac{1}{2} \text{ এবং } \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ হইতে।}$$

লক্ষ্য করা হইল যে α অবশ্যই দ্বিতীয় পাদতে অবস্থিত হইবে

($\because$ $\sin\alpha$ ধনাত্মক এবং $\cos\alpha$ ঋণাত্মক)। বস্তুত, $\alpha=120°$.

অঙ্কন। (চিত্র 5.7 দ্রষ্টব্য)।

$\overline{ON}$ কে এইরূপভাবে লওয়া হইল যেন $\widehat{XON}=120°$ হয়। $\overrightarrow{ON}$ হইতে $\overline{ON}$ এইভাবে ছিন্ন করা হইল যেন $\overline{ON}=\frac{7}{2}$ একক হয়। N গামী এবং $\overline{ON}$ এর লম্ব একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। এই প্রকারে নির্ণেয় রেখা অঙ্কিত হইল।

সরলরেখাসমূহের অঙ্কন-প্রণালী, যখন উহাদের সমীকরণ প্রদত্ত থাকে

উদা. 6. নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলি অঙ্কন কর :

(*i*) $4x+3y-12=0$; (*ii*) $2x+3y+6=0$;

(*iii*) $x+y=0$; (*iv*) $x=5$;

(*v*) $y=-6$.

সঙ্কেত। 1. ধ্রুবক পদটি শূন্য হইলে সমীকরণটিকে প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ কর : যেমন (*iii*).

2. অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা সহজেই অঙ্কন করা যাইবে : যেমন (*iv*) এবং (*v*).

3. অপর ক্ষেত্রগুলিতে সমীকরণগুলিকে ছেদিতাংশ আকারে লইয়া যাও : যেমন (*i*) এবং (*ii*).

(*i*) $4x+3y=12$

বা, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore$ রেখাটির উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু A(3, 0) এবং B(0, 4)। এখন রেখাটি অঙ্কন কর।

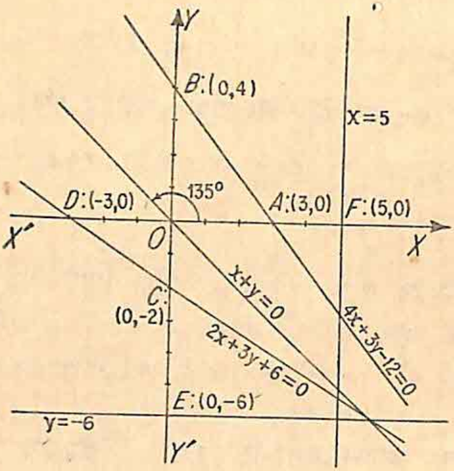
(*ii*) $2x+3y=-6$

বা, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$

$\therefore$ রেখাটির দুইটি বিন্দু হইল C(−3, 0) এবং D(0, −2)। এখন রেখাটি অঙ্কন কর।

(*iii*) $y=-x$ (প্রবণতা $=-1$, নতিকোণ $=135°$) রেখাটি মূলবিন্দুগামী।

চিত্র 5.8এ সমুদয় রেখা প্রদর্শিত হইল।



চিত্র 5.8. রেখা অঙ্কন

অনুশীলনী

1. যে সরলরেখাগুলির সমীকরণ নিম্নে প্রদত্ত আছে তাহাদের অঙ্কন কর :

(i) $x+2y-3=0$; (ii) $5x-7y-9=0$;

(iii) $7x+3y=0$; (iv) $3x+8=0$.

2. নিম্নের রেখাগুলির প্রবণতা এবং y-ছেদিতাংশ নির্ণয় কর : রেখাগুলি অঙ্কন কর :

(i) $4x+2y-1=0$; (ii) $7x+8y+5=0$;

(iii) $y=0$; (iv) $x=3-y$;

(v) $2y-3=0$; (vi) $by+ax=ab$, $(a, b>0)$.

3. p এবং αর প্রদত্ত মানের সাহায্যে প্রত্যেকটি রেখা অঙ্কন কর এবং অভিলম্ব-আকারে তাহাদের সমীকরণগুলি লিখ :

(i) $p=5$, $\alpha=30°$; (ii) $p=4$, $\alpha=240°$;

(iii) $p=6$, $\alpha=315°$; (iv) $p=6$, $\alpha=120°$.

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির প্রত্যেকটিকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ কর এবং α ও p নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{3}x+y=9$; (ii) $x+y+8=0$;

(iii) $4y-7=0$; (iv) $x+5=0$.

5. যে যে ক্ষেত্রে বিদ্যমান সেই সেই ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত রেখাগুলির x-ছেদিতাংশ এবং y-ছেদিতাংশ উভয়ই নির্ণয় কর এবং রেখাগুলি অঙ্কন কর :

(i) $2x+3y-12=0$; (ii) $x-y+1=0$;

(iii) $5x+7y+13=0$; (iv) $2x-3y=0$;

(v) $2x+3=0$; (vi) $x=0$.

6. কোন বর্গের কর্ণদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত এবং উহাদের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 2 একক। বাহু (বর্ধিত) চারিটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

2. (i) -2 ; $1/4$ এবং $1/2$; (ii) $-7/8$; $-\frac{5}{7}$ এবং $-5/8$; (iii) 0 ; কোন ছেদিতাংশ নাই ; (iv) -1 ; 3 এবং 3 ; (v) 0 ; x ছেদিতাংশ নাই, y ছেদিতাংশ$=3/2$; (vi) $-a/b$; b এবং a.

4. (i) $30°$ এবং $9/2$; (ii) $225°$ এবং $4\sqrt{2}$; (iii) $90°$ এবং $7/4$; (iv) $180°$ এবং 5.

6. $x+y=\pm 1$ এবং $x-y=\pm 1$.

5·9. দুইটি রেখার ছেদ (Intersection of two lines)

ধরা যাক্, নিম্নলিখিত রেখাদ্বয়, যথা :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\text{এবং} \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে এবং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় (α, β)।

যেহেতু (α, β) উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, সুতরাং

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$

$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$$

ইহাদের সমাধান দ্বারা (বজ্রগুণন প্রণালীতে) পাওয়া যায় :

$$\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\beta}{c_1a_2-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

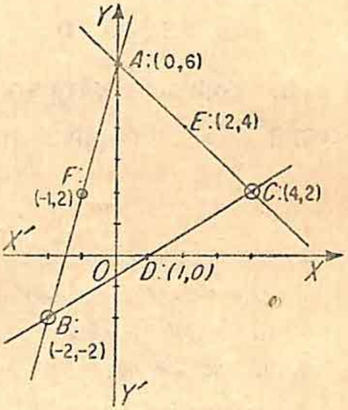
$\therefore$ ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কদ্বয় হইল :

$$\alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad \beta=\frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

মন্তব্য : যদি $a_1b_2-a_2b_1=0$ হয়, **অর্থাৎ** যদি $a_1/a_2=b_1/b_2$ হয়, তবে রেখা দুইটি ছেদ করিবে না। এই ক্ষেত্রে রেখা দুইটির প্রবণতা $-a_1/b_1$, এবং $-a_2/b_2$ পরস্পর সমান এবং রেখা দুইটি সমান্তরাল।

উদা. 7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 6)$, $(-2, -2)$, $(4, 2)$ বিন্দু ; উহার (*i*) মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু ; (*ii*) লম্ব-উচ্চতাত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু ; (*iii*) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। যাচাই করিয়া দেখ যে নির্ণীত ছেদবিন্দুত্রয় সমরেখ।

ধরা যাক্, শীর্ষত্রয় A : $(0, 6)$, B : $(-2, -2)$ এবং C : $(4, 2)$ [চিত্র 5.9]



চিত্র 5.9

(*i*) ধরা যাক্, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E এবং F.

D, E এবং F এর স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right), \left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right),$$

$$\text{এবং } \left(\frac{0-2}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$

অর্থাৎ $(1, 0)$, $(2, 4)$, $(-1, 2)$.

মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ :

$\overleftrightarrow{AD}$র সমীকরণ : $y-6=\dfrac{0-6}{1-0}(x-0)$

অর্থাৎ $y+6x-6=0$.

$\overleftrightarrow{BE}$র সমীকরণ : $y+2=\dfrac{4+2}{2+2}(x+2)$

অর্থাৎ, $2y-3x-2=0$.

$\overleftrightarrow{CF}$ এর সমীকরণ : $y-2=\dfrac{2-2}{-1-4}(x-4)$

অর্থাৎ, $y=2$.

মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের জন্য প্রথমত যে কোন দুইটি মধ্যমার সমীকরণ, মনে করা যাক,

$$y+6x-6=0 \text{ এবং } y=2$$

সমাধান করিতে হইবে। সমাধান দ্বারা পাওয়া যায় : $x=\frac{2}{3}$, $y=2$. এই $(\frac{2}{3}, 2)$ বিন্দুটি তৃতীয় মধ্যমা $2y-3x-2=0$ এর উপরও অবস্থিত বলিয়া দেখা যায়।

$\therefore$ মধ্যমা তিনটি পরস্পরকে $(\frac{2}{3}, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(*ii*) যেহেতু $\overline{BC}$র প্রবণতা $=\frac{2+2}{4+2}=\frac{2}{3}$,

সুতরাং A গামী লম্ব-উচ্চতার ($\overline{BC}$র উপর লম্ব) প্রবণতা $= -3/2$; সুতরাং A বিন্দুগামী লম্ব-উচ্চতা রেখার সমীকরণ হইল

$$y-6=-\tfrac{3}{2}(x-0)$$

বা, $2y+3x-12=0.$

অনুরূপভাবে B এবং C বিন্দুগামী লম্ব-উচ্চতাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে। উহারা যথাক্রমে

$$y-x=0 \quad \text{এবং } 4y+x-12=0.$$

$2y+3x-12=0$ এবং $y-x=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$$x=y=\tfrac{12}{5}$$

আবার $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ বিন্দু তৃতীয় লম্ব-উচ্চতার উপরও অবস্থিত বলিয়া দেখা যায়।

∴ লম্ব-উচ্চতাত্রয় $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

(*iii*) $\overline{BC}$র প্রবণতা $=\frac{2}{3}$

সুতরাং $\overline{BC}$র উপর লম্ব যে কোন রেখার প্রবণতা $=-\frac{3}{2}$

এখন $\overline{BC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক D : (1, 0) বিন্দুগামী ;

∴ $\overline{BC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$y-0=-\tfrac{3}{2}\,(x-1)$$

বা, $2y+3x-3=0.$

অনুরূপভাবে $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করা যায়। তাহারা হইল যথাক্রমে

$$y-x-2=0 \text{ এবং } 4y+x-7=0.$$

সমাধানপূর্বক দেখা যাইবে, $(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$ বিন্দুটি লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সাধারণ ছেদবিন্দু।

অবশেষে, যাচাই করিয়া দেখিতে হইবে যে বিন্দুত্রয় L : $(\frac{2}{3}, 2)$, M : $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ এবং N : $(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$ এক সরলরেখায় অবস্থিত।

ইহার জন্য ইহা প্রমাণ করিলেই হইবে যে

$$\overline{LM} \text{ এর প্রবণতা} = \overline{LN} \text{ এর প্রবণতা} = \tfrac{3}{13}$$

অথবা, L এবং M গামী রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করা যায় : যথা, $13y-3x-24=0$ এবং পরে দেখা যাইতে পারে যে N বিন্দু উহার উপর অবস্থিত।

অনুশীলনী

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (2, 0), (3, 2,), (4, −3) হইলে ত্রিভুজটি সম্পর্কে নিম্নলিখিতগুলি নির্ণয় কর :

(*i*) মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু ; (*ii*) উচ্চতাত্রয়ের সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু এবং (*iii*) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু। যাচাই করিয়া দেখ যে এইভাবে নির্ণীত বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের, ত্রিভুজের উচ্চতাত্রয়ের এবং বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু তিনটিকে যথাক্রমে ভরকেন্দ্র (centroid), লম্ব-বিন্দু (ortho-centre) এবং পরি-কেন্দ্র (circum-centre) বলা হয়।

2. বিশ্লেষণ-জ্যামিতির পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে **যে কোন ত্রিভুজের** ভরকেন্দ্র, লম্ব-বিন্দু এবং পরি-কেন্দ্র সমরেখ (collinear)।

সঙ্কেত। অক্ষদ্বয়ের উপযুক্ত নির্বাচন কর। উপযুক্ত নির্বাচন হইবে, যদি ত্রিভুজটির একটি বাহু বরাবর x-অক্ষ এবং যে কোন একটি শীর্ষগামী y-অক্ষ লওয়া হয়।

5·10. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ (Angle between two lines)

অনুচ্ছেদ 3·5 (পৃষ্ঠা 38) এ m_1 প্রবণতার রেখা L_1 **হইতে** m_2 প্রবণতার রেখা L_2 **পর্যন্ত** কোণ ϕ এর মান নির্ণয়ের সূত্র নিম্নলিখিত আকারে পাওয়া গিয়াছিল, যথা :

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}, \quad \dots \qquad (1)$$

যেখানে ধরিয়া লওয়া হইয়াছিল যে L_1 অথবা L_2 কেহই y অক্ষের সমান্তরাল নহে (অর্থাৎ m_1 এবং m_2 উভয়েরই মান সসীম বলিয়া ধরা হইয়াছিল)।

ধরা যাক্, L_1 এবং L_2 কে নিম্নের সমীকরণ দুইটি প্রকাশ করে, যথা :

$$L_1 :\ a_1x+b_1y+c_1=0 \ (a_1, b_1 \text{ উভয়েই শূন্য নহে })$$

$$L_2 :\ a_2x+b_2y+c_2=0 \ (a_2, b_2 \text{ উভয়েই শূন্য নহে })।$$

এখন, প্রথমে ধরা যাক্ b_1 এবং $b_2\neq0$, সুতরাং L_1 এর প্রবণতা $=m_1$ (ধরা হইল) $=-a_1/b_1$ এবং L_2 এর প্রবণতা $=m_2$ (মনে করা যাক্) $=-a_2/b_2$.

তাহা হইলে L_1 রেখা হইতে L_2 রেখা পর্যন্ত কোণ ϕ হইলে

$$\tan\phi=\frac{\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)-\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)}{1+\left(\dfrac{-a_2}{b_2}\right)\cdot\left(\dfrac{-a_1}{b_1}\right)}$$

$$=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2+a_1a_2}.$$

মন্তব্য। ইহা স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে যে L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণ ϕ পরিমাপ করা হইবে এবং সেই অনুসারে সূত্র **(1)** পাওয়া গিয়াছে। কোন কোন গ্রন্থকারের ব্যাখ্যা অনুসারে কিন্তু "L_1 এবং L_2 এর **মধ্যে** কোণ" হইল হয় "L_1 **হইতে** L_2 পর্যন্ত কোণ" অথবা "L_2 **হইতে** L_1 **পর্যন্ত** কোণ"—ইহাদের মধ্যে যেটিই সূক্ষ্ম সেইটি, তা যেকোনটিই হউক না কেন। সুতরাং চিত্র 3.6 অথবা 3.7 প্রসঙ্গে তাহারা L_1 এবং L_2 এর **মধ্যবর্তী** কোণ হিসাবে হয় ϕ কে অথবা উহার সম্পূরককে লইয়া থাকেন। এইজন্য তাঁহারা সূত্রটিকে নিম্নের আকারে প্রকাশ করেন :

$$\tan(\text{ } L_1 \text{ এর } L_2 \text{ এর অন্তর্বর্তী কোণ }) = \pm\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

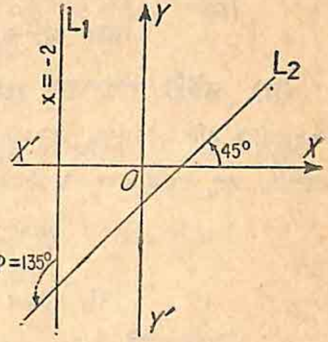
আমাদের প্রচলিত রীতি হইবে

$$0^\circ \leqslant \phi \leqslant 180^\circ.$$

সূত্র (1) নিরূপণের সময় ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে L_1 এবং L_2 উভয়েরই নির্দিষ্ট প্রবণতা বর্তমান। যদি ইহা না হয়, তবে রেখা দুইটির একটি অন্ততঃ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তখন এই সূত্রের প্রয়োজন হয় না—কোণ ϕ সরাসরি নির্ণয় করা যায়। যেমন, ধরা যাক, L_1 এবং L_2 হইল যথাক্রমে

$$x + 2 = 0 \text{ এবং } x - y = 1.$$

তাহা হইলে (চিত্র 5.10 দ্রষ্টব্য) L_1 y-অক্ষের সমান্তরাল এবং L_2 ধনাত্মক x-অক্ষের উপর 45° কোণে নত, কারণ $x - y = 1$ রেখার প্রবণতা হইল 1. ফলে L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণটি হইল 135° (চিত্র দ্রষ্টব্য).



চিত্র 5.10

দুইটি রেখা L_1 এবং L_2 এর পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব হইবার শর্ত, যেখানে

$$L_1 : \; a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$L_2 : \; a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

***(i)* দুইটি সমান্তরাল রেখা :** দুইটি রেখা সমান্তরাল হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি উহাদের প্রবণতা সমান হয়। সুতরাং L_1 এবং L_2 সমান্তরাল হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ (অবশ্য } b_1 \text{ এবং } b_2 \text{ যদি শূন্য না হয়)।}$$

ইহাই L_1 এবং L_2 রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হওয়ার শর্ত প্রদান করে, যথা :

L_1 এবং L_2 হইল সমান্তরাল, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ হয়।

এখন লক্ষ্য করা যাক :

যদি $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = k$ ($\neq 0$, ধরা যায়), তবে $a_1 = ka_2$ এবং $b_1 = kb_2$ এবং তাহা হইলে রেখা দুইটিকে এইভাবে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$k(a_2x+b_2y)+c_1=0 \quad \text{এবং } a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$\therefore \quad a_2x+b_2y+c_1/k=0 \quad \text{এবং } a_2x+b_2y+c_2=0 \text{ হইল সমান্তরাল।}$$

বিপরীতক্রমে, যদি $b_2 \neq 0$ হয়, রেখা দুইটির একই প্রবণতা, $(=-a_2/b_2)$; যদি $b_2=0$ হয়, তবে a_2 তখন শূন্য হইতে পারে না, এবং রেখা দুইটির প্রত্যেকে y-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

সুতরাং নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায় :

প্রতিপাদ্য 1. দুইটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল হয়, যখন উহাদের সমীকরণদ্বয়কে এইরূপ আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax+by+c=0$$

$$\text{এবং } ax+by+c'=0$$

***(ii)* দুইটি পরস্পর লম্ব রেখা :** দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব, যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাহাদের প্রবণতাদ্বয়ের গুণফল $=-1$ হয়। সুতরাং L_1 এবং L_2 পরস্পর লম্ব, যখন এবং কেবলমাত্র যখন

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$$

$$\text{বা, } \quad a_1a_2+b_1b_2=0.$$

ইহাই দুইটি রেখা L_1 এবং L_2 এর পরস্পর **লম্ব হওয়ার শর্ত**।

এখন লক্ষ্য করা যাক্ যে, যদি $a_1a_2+b_1b_2=0$ হয়, তবে

$$\frac{a_2}{b_1}=-\frac{b_2}{a_1}=k \text{ (} \neq 0, \text{ যদি ধরা যায়)}$$

$$\text{বা, } \quad a_2=kb_1 \quad \text{এবং } b_2=-ka_1$$

$$\therefore \quad \text{সমীকরণ } a_2x+b_2y+c_2=0 \text{ এখন হইবে :}$$

$$k(b_1x-a_1y)+c_2=0$$

$$\text{বা, } \quad b_1x-a_1y+\frac{c_2}{k}=0.$$

অতএব পরস্পর লম্ব দুইটি রেখাকে এইরূপ আকারে পাওয়া গেল, যথা :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

এবং $b_1x-a_1y+c_2/k=0.$

বিপরীতক্রমে, যদি $b_1\neq0$ এবং $a_1\neq0$ হয়, তবে প্রবণতা দুইটির গুণফল $=(-a_1/b_1)\cdot(b_1/a_1)=-1$ এবং রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব।

ইহা হইতে নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায় :

প্রতিপাদ্য 2. দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয় যখন এবং কেবলমাত্র যখন তাহাদের সমীকরণদ্বয়কে এইরূপ আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax+by+c=0$$

এবং $bx-ay+c'=0.$

[প্রথম সমীকরণ হইতে দ্বিতীয়টি পাওয়া যায়—প্রথমটির x এবং y এর সহগ দুইটির স্থান বিনিময়, উহাদের একটির চিহ্ন পরিবর্তন এবং ধ্রুবক পদটিকে অপর কোন ধ্রুবকে পরিবর্তন দ্বারা।]

নিম্নে প্রতিপাদ্য 1 এবং 2 এর প্রয়োগমূলক দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

উদা. 8. (5, −6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা

(*i*) $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল হয় ;

(*ii*) $8x+7y+5=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

(*i*) প্রথম প্রণালী : $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণের আকার হইবে :

$8x+7y+c=0,$ যেখানে c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

যদি এই রেখাকে (5, −6) বিন্দু দিয়া যাইতে হয়, তবে

$$8\times5+7\times-6+c=0,$$

বা, $c=2.$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ হইল

$$8x+7y+2=0.$$

দ্বিতীয় প্রণালী : $8x+7y+5=0$ রেখার প্রবণতা হইল $-8/7$; নির্ণেয় রেখা, এই রেখার সমান্তরাল, সুতরাং উহার একই প্রবণতা। আবার ইহা (5, −6) বিন্দুগামী। সুতরাং উহার সমীকরণ (বিন্দু-প্রবণতা আকারে) হইল

$$y+6=-\tfrac{8}{7}(x-5)$$

বা, $7y+8x+2=0.$

তৃতীয় প্রণালী : (প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারের সাহায্য লইয়া)।

ধরা যাক্, নির্ণেয় রেখার সমীকরণটি হইল

$y=mx+c$ ($m=$প্রবণতা, $c=y$-ছেদিতাংশ)

যেহেতু ইহা $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল (যাহার প্রবণতা $=-8/7$),

$$\therefore\ m=-\tfrac{8}{7} \quad \cdots \quad (1)$$

আবার যেহেতু ইহা $(5, -6)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore\ -6=5m+c \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে, $m=-\frac{8}{7}$ এবং $c=-\frac{2}{7}$; সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=-\tfrac{8}{7}x-\tfrac{2}{7}$$

বা, $7y+8x+2=0.$

***(ii)* প্রথম প্রণালী :** $8x+7y+5=0$ রেখার উপর লম্ব যে কোন রেখার সমীকরণের আকার হইবে,

$$7x-8y+c=0$$

যেহেতু নির্ণেয় রেখা $(5, -6)$ বিন্দু দিয়াও গমন করে,

$$\therefore\ 7\times5-8(-6)+c=0,$$

বা, $c=-83.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল :

$$7x-8y-83=0.$$

টীকা। ছাত্রছাত্রীরা পূর্বের ন্যায় অপর প্রণালীগুলির (বিন্দু-ছেদিতাংশ বা প্রবণতা-ছেদিতাংশ) সাহায্যে প্রশ্নটি সমাধানের চেষ্টা করিতে পারে।

অনুশীলনী

1. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $yy_1=2a(x+x_1)$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ বিন্দুগামী এবং $x\sec\theta+y\,\mathrm{cosec}\,\theta=a$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হইল $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2\theta.$

3. যে রেখা $2x-y-4=0$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রথম পাদ হইতে এইরূপ একটি ত্রিভুজ ছিন্ন করে যাহার ক্ষেত্রফল 16 বর্গএকক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি রেখা, $3x+2y-6=0$ রেখার সমান্তরাল এবং উহা প্রথম পাদতে নিম্নলিখিত রেখা দুইটি,

$$x-2y=0 \text{ এবং } 2x-y=0$$

এর সহিত এইরূপ একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, যাহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গএকক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

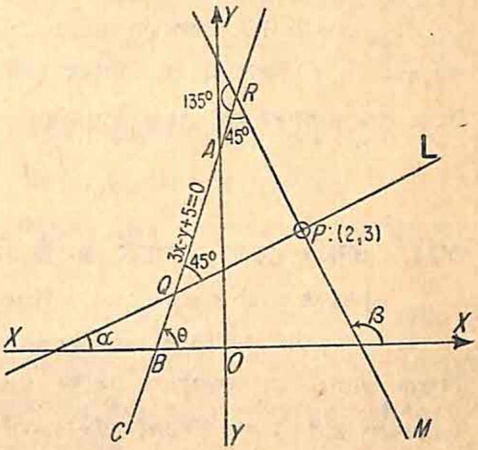
[উঃ 1. $2ay+xy_1=2ay_1+x_1y_1$. 3. $x+2y-8=0$. 4. $3x+2y-28=0$.]

উদা. 9. (2, 3) বিন্দুগামী এইরূপ **সরলরেখাগুলির** সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা নিম্নের রেখাটি,

$$3x-y+5=0$$

এর সহিত 45° সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে।

ধরা যাক P : (2, 3) প্রদত্ত বিন্দু, এবং $\overleftrightarrow{CBA}$ প্রদত্ত রেখা $3x-y+5=0$; যদি এই রেখা ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ কোণ করে, তবে $\tan\theta=3$. [চিত্র 5.11]



চিত্র 5.11

এখন অঙ্কন করা যাক দুইটি রেখা—$\overleftrightarrow{QPL}$ এবং $\overleftrightarrow{MPR}$—যাহাদের প্রত্যেকে $\overleftrightarrow{CBA}$ রেখার সহিত 45° সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে।

চিত্র হইতে, $\overleftrightarrow{QPL}$ **হইতে** $\overleftrightarrow{CBA}$ **পর্যন্ত** কোণ = 45°, সুতরাং $P\hat{Q}R=45°$. $\overleftrightarrow{MPR}$ **হইতে** $\overleftrightarrow{CBA}$ পর্যন্ত কোণ = 135° ; সূক্ষ্ম কোণটি বিবেচনা করিতে হইবে, সুতরাং উহার সম্পূরক $Q\hat{R}P=45°$ কে লওয়া হইল।

ধরা যাক যে $\overleftrightarrow{QPL}$ এবং $\overleftrightarrow{MPR}$ রেখাদ্বয়ের নতিকোণ যথাক্রমে α এবং β. চিত্র 5.11 হইতে $\theta=45°+\alpha$ এবং $\beta=45°+\theta$.

$$\therefore \tan\alpha=\tan(\theta-45°)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\beta=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\frac{3+1}{1-3}=-2$$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ (বিন্দু-প্রবণতা আকারে) হইল :

$$y-3=\tfrac{1}{2}(x-2) \text{ এবং } y-3=-2(x-2)$$

অর্থাৎ, $2y-x-4=0$ এবং $y+2x-7=0$.

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে (x', y') বিন্দুগামী যে রেখাগুলি প্রদত্ত রেখা $y=mx+c$ এর সহিত সূক্ষ্ম কোণ α উৎপন্ন করে, তাহাদের সমীকরণ হইল :

$$y-y'=\frac{m\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha}(x-x')$$

2. $3x=4y+7$ সরলরেখা হইতে $5y=12x+6$ রেখা পর্যন্ত কোণটি নির্ণয় কর এবং $(4, 5)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা দুইটি প্রদত্ত রেখা দুইটির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণও নির্ণয় কর।

[উঃ $\tan^{-1}\frac{33}{56}$; $9x-7y=1$, $7x+9y=73$]

5·11. একটি রেখা সম্পর্কে একটি বিন্দুর অবস্থান (Position of a point with respect to a line)

1. যে কোন রেখা L : $ax+by+c=0$ $(c\neq 0)$ সমতলটিকে দুইটি অঞ্চলে বিভক্ত করে : যে অঞ্চলটিতে মূলবিন্দু থাকে, তাহাকে L এর **মূলবিন্দু-পার্শ্ব (origin side)** এবং অপরটিকে উহার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্ব (non-origin side) বলা হয়।

2. যদি c ধনাত্মক হয়, তবে বলা হয় যে মূলবিন্দু রেখাটির **ধনাত্মক পার্শ্বে** আছে ; যদি c ঋণাত্মক হয়, তবে মূলবিন্দু রেখাটির **ঋণাত্মক পার্শ্বে** আছে বলা হইবে।

3. (*a*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) রেখা L : $ax+by+c=0$ এর **মূলবিন্দুর পার্শ্বে** অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং c এর চিহ্ন একই হয়। আরও স্পষ্ট করিয়া বলিলে বলিতে হয় যে,

(*i*) যদি ax_1+by_1+c এবং c উভয়েই **ধনাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ধনাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

(*ii*) যদি ax_1+by_1+c এবং c উভয়েই **ঋণাত্মক** হয়, তবে P, L এর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

(*b*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1), L রেখার **মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে** অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং c এর চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হয়। আরও স্পষ্টকরিয়া বলিলে,

(*i*) যদি c **ধনাত্মক** এবং ax_1+by_1+c **ঋণাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ঋণাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

(*ii*) যদি c **ঋণাত্মক** এবং ax_1+by_1+c **ধনাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ধনাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

দৃষ্টান্ত : (3, 2) বিন্দু $2x-3y-1=0$ রেখার ঋণাত্মক পার্শ্বে এবং $3x-2y-1=0$ রেখার ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত। (যাচাই করিয়া দেখ।)

উদা. 10. প্রমাণ কর যে (2, −1) এবং (1, 1) বিন্দু $3x+4y-6=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

এখানে **মূলবিন্দু** রেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত (কারণ ধ্রুবক পদটি ঋণাত্মক)।

$3\times2+4\times-1-6=-4$ এবং $3\times1+4\times1-6=1$ এই রাশি দুইটি যথাক্রমে ঋণাত্মক এবং ধনাত্মক।

$\therefore$ (2, −1) রেখাটির মূলবিন্দুর পার্শ্বে (**অর্থাৎ** ঋণাত্মক পার্শ্বে) এবং (1, 1) বিন্দু উহার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে (**অর্থাৎ** ধনাত্মক পার্শ্বে) অবস্থিত।

সুতরাং (2, −1) এবং (1, 1) বিন্দু দুইটি প্রদত্ত রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

4. ইহা সহজেই নিরূপণ করা যায় যে, c ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ রেখার একই পার্শ্বে (অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে) অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c এই রাশি দুইটির যথাক্রমে একই (অথবা বিপরীত) চিহ্ন হয়।

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে মূলবিন্দু এবং (2, 3) বিন্দু $7x-24y+8=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

2. দেখাও যে P : (3, 2), Q : (3, −1) বিন্দুদ্বয় $x-2y+2=0$ এবং $x+y+1=0$ রেখা দুইটির দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

3. দেখাও যে বিন্দু চতুষ্টয়, যথা : (0, 0), (−1, 1), (−7, −4) এবং (9, 6) $2x-3y+1=0$ এবং $3x-5y+2=0$ সরলরেখা দুইটির দ্বারা উৎপন্ন চারটি অঞ্চলে অবস্থিত।

4. দেখাও যে (3, 2) এবং (7, 3) বিন্দুদ্বয় $2x-5y+3=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

5. দেখাও যে (−2, 6) বিন্দুটি $3x+2y-7=0$ রেখার ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ নিম্নরূপ :

$x-7y+25=0$, $5x+3y+11=0$, এবং $3x-2y-1=0$;

দেখাও যে মূলবিন্দু ত্রিভুজটির মধ্যে অবস্থিত।

সঙ্কেত : অনুরূপ শীর্ষত্রয় হইল (−1, −2), (3, 4) এবং (−4, 3).

মন্তব্য ঃ যে ক্ষেত্রে L : $ax+by+c=0$ রেখা মূলবিন্দুগামী (**অর্থাৎ** $c=0$) সেই ক্ষেত্র এখন পর্যন্ত বিবেচনা করা হয় নাই। এই রেখাও সমতলটিকে দুইটি অংশে বিভক্ত করে। যে অংশের প্রত্যেক বিন্দু (x_1, y_1)র জন্য $ax_1+by_1>0$ হয়, সেই অংশটিকে L এর **ধনাত্মক পার্শ্বে** বলা হইবে এবং অপর অংশটিকে উহার **ঋণাত্মক পার্শ্বে** ধরা হইবে।

5·12. প্রদত্ত একটি রেখা হইতে কোন বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব (Perpendicular distance of a point from a line)

প্রতিপাদ্য ঃ দেওয়া আছে অভিলম্ব-আকারে L রেখার সমীকরণ ঃ

L : $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \ (p>0)$.

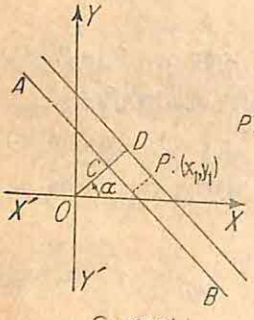
এবং আরও দেওয়া আছে সমতলটিতে যে কোন বিন্দু P : (x_1, y_1)।

L রেখা **হইতে** P বিন্দু **পর্যন্ত** লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। বস্তুতপক্ষে প্রমাণ করিতে হইবে যে L রেখা হইতে P বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব

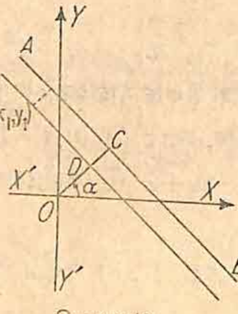
$=p-x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$, যদি P, L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে অবস্থিত হয় ;

$=-(p-x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)$, যদি P, L রেখার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত হয়।

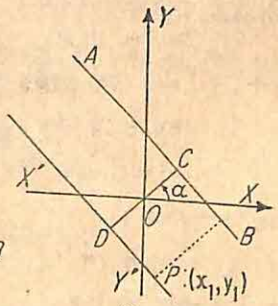
প্রমাণ। চিত্র 5.12 (a), (b) এবং (c) এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা হইতেছে।



চিত্র 5.12(a)



চিত্র 5.12(b)



চিত্র 5.12(c)

ধরা যাক্ $\overleftrightarrow{AB}$ হইল প্রদত্ত রেখা L, যাহার অভিলম্ব-আকারের সমীকরণ হইল

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (p>0)$$

ধরা যাক্ $\overline{OC}$, $\overleftrightarrow{AB}$র উপর অঙ্কিত লম্ব। তাহা হইলে

$$\widehat{XOC}=\alpha, \quad \overline{OC}=p.$$

ধরা যাক্ P : (x_1, y_1) প্রদত্ত বিন্দু, যাহা হইতে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। P দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক্, $\overline{OD}$ এই রেখার উপর লম্ব।

ক্ষেত্র 1. চিত্র 5.12(*a*) : ধরা হইল, D বিন্দু, $\overline{OC}$এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত ;

স্পষ্টত $\widehat{XOD}=\alpha$, $\overline{OD}=p_1$ (মনে করা হইল)

এখন L রেখার সমান্তরাল এবং P বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হইল

$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p_1$; যেখানে $p_1=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha$.

$\therefore$ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=p_1-p=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha-p$$
$$=-(p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha).$$

[টীকা : এই চিত্রে P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে এবং $p>0$;

$\therefore$ $p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$ **ঋণাত্মক**।]

ক্ষেত্র 2. চিত্র 5.12(*b*) : ধরা হইল D বিন্দুটি $\overline{OC}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত।

ইহা স্পষ্ট যে, $\widehat{XOD}=\alpha$, $\overline{OD}=p_1$ (মনে করা হইল)

সুতরাং P বিন্দুগামী ও L রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হইবে

$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p_1$, যেখানে $p_1=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha$.

$\therefore$ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্ব-দৈর্ঘ্য

$$=p-p_1=p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha.$$

[টীকা : এই চিত্রে P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে এবং $p>0$

$\therefore$ $p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$ **ধনাত্মক**।]

ক্ষেত্র 3. চিত্র 5.12(*c*) : ধরা হইল, D বিন্দুটি বর্ধিত $\overline{CO}$ ছেদাংশের উপর অবস্থিত।

তাহা হইলে $\widehat{XOD}=\alpha+\pi$ এবং $\overline{OD}=p_1$ (মনে কর)

P বিন্দুগামী এবং L রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ এখানে

$$x \cos (\alpha+\pi)+y \sin (\alpha+\pi)=p_1$$

বা, $x \cos \alpha+y \sin \alpha=-p_1$, যেখানে $p_1=-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$.

∴ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্ব-দৈর্ঘ্য

$$=p+p_1=p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha.$$

[টীকা : P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে এবং $p>0$;

∴ $p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$ **ধনাত্মক**।]

সুতরাং নির্ণেয় লম্ব-দূরত্ব (যাহা মূলতঃ ধনাত্মক)

$$=\pm(p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha),$$

মনে রেখ + অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে P বিন্দুটি সরলরেখা $p-x \cos \alpha-y \sin \alpha=0$ অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অথবা মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত—তাহার উপর।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি অভিলম্ব-আকারের পরিবর্তে L রেখার সমীকরণ নিম্ন আকারের হয়, যথা :

$$ax+by+c=0,$$

তবে সমীকরণটিকে প্রথমে অভিলম্ব-আকারে লইয়া আসা যায়, যেমন

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=0.$$

এখন, যদি $c>0$ হয়, তবে L রেখাটি হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইবে

$$\pm\frac{c+ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cdots \quad (i)$$

এখানেও + অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে (x_1, y_1) বিন্দু L রেখাটির অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অথবা মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত—তাহার উপর।

আবার, যদি $c<0$ হয়, তবে L রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইবে

$$\pm\frac{c+ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cdots \quad (ii)$$

+ অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে (x_1, y_1) বিন্দু রেখাটির অনুসারে **মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে** অথবা **মূলবিন্দুর পার্শ্বে** অবস্থিত—তাহার উপর।

(i) ও (ii) কে যুক্তভাবে বলিলে, বলিতে হয় যে,

$ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইল

$$\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

যেখানে ইহার এবং c এর চিহ্ন একই হইবে, যখন (x_1, y_1) বিন্দু রেখাটির অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অবস্থিত হইবে, এবং উহাদের চিহ্ন বিপরীত হইবে, যখন (x_1, y_1) বিন্দু মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

[টীকা। ছাত্রছাত্রীরা স্মরণ রাখিতে পারে যে $ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব সর্বদা

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

এখন $ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্বের সাংখ্যমান নির্ণয়ের আরও তুইটি পদ্ধতি আলোচনা করা হইবে।

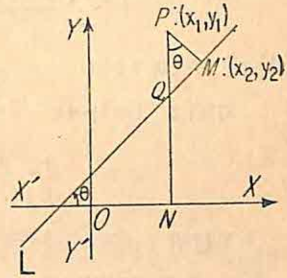
প্রশ্ন। প্রদত্ত : একটি বিন্দু P : (x_1, y_1), যাহা

$$L : ax+by+c=0$$

রেখার উপর অবস্থিত নহে।

নির্ণেয় : L রেখা **হইতে** P বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব, d (মনে করা যাক্)। dএর সাংখ্য-মান নির্ণয় করিতে হইবে

পদ্ধতি 1. P হইতে X-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্বপাত করা হইল। ধরা যাক্, $\overline{PN}$, L রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে Q এর ভুজ হইল $\overline{ON}=x_1$; Q এর কোটিকে y_3 দ্বারা নির্দেশ করা হইল।



চিত্র 5.13 রেখা হইতে একটি বহিঃস্থ বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব

তাহা হইলে $\overline{QP}=\overline{NP}-\overline{NQ}=y_1-y_3$.

যেহেতু Q : (x_1, y_3) L রেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক L এর সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে ; অতএব

$$ax_1+by_3+c=0$$

$$\text{বা,}\quad y_3=-\frac{ax_1+c}{b},\ (\text{ যদি } b\neq 0 \text{ হয় })$$

$$\text{সুতরাং,}\quad \overline{QP}=y_1-y_3=y_1+\frac{ax_1+c}{b}=\frac{ax_1+by_1+c}{b}\quad\ldots\quad(1)$$

ধরা যাক্, L ধনাত্মক x-অক্ষের উপর θ কোণে নত। এখন $\overline{QP}\cos\theta$ গুণফলটি বিবেচনা করা যাক্। P এবং L এর অবস্থান অনুসারে উৎপাদক তুইটির একটি অথবা তুইটিই ঋণাত্মক হইতে পারে।

[মূলত P এবং L এর চারিটি বিভিন্ন অবস্থান আছে : কারণ L এর ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক প্রবণতা হইতে পারে এবং P, L এর একদিকে অথবা অপরদিকে অবস্থিত হইতে পারে]

কিন্তু, গুণফলটির সাংখ্যমান, d দূরত্বের সমান :

$$d=|\overline{QP}\cos\theta|\quad\ldots\quad(2)$$

[5.13 চিত্র হইতে ইহা সুস্পষ্ট ; কিন্তু ছাত্রছাত্রীদের উচিত হইবে, P এবং L এর অপর অবস্থানগুলি অঙ্কনপূর্বক দেখান যে ঐ ক্ষেত্রগুলিতেও (2) বৈধ।]

যেহেতু L এর প্রবণতা হইল

$$\tan\theta = -\frac{a}{b},$$

সুতরাং $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\therefore\quad d = |\overline{QP}\cos\theta| = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\cdot\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

বা, $d = \pm\dfrac{ax_1+by_1+c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$, যেখানে ডানপক্ষকে ধনাত্মক করিতে উপযুক্ত চিহ্নটি লইতে হইবে।

যথা : $3x+4y-7=0$ রেখা হইতে $(3, -2)$ বিন্দুর দূরত্ব হইল

$$d = \frac{|3.3+4(-2)-7|}{+\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-6|}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

মন্তব্য : আলোচনার সময় ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে $b\neq 0$, সুতরাং পরোক্ষে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে L রেখা y অক্ষের সমান্তরাল নহে। কিন্তু উপরে নির্ণীত d এর সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে তখনও যখন রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল। কারণ এই ক্ষেত্রে ইহা স্পষ্ট (একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া লওয়া যাইতে পারে) যে

$$d = \left|x_1 + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

এবং হুবহু একই ফল সূত্রটি হইতেও পাওয়া যায়, যদি উহাতে $b=0$ ধরা হয়।

পদ্ধতি 2. L : $ax+by+c=0$ রেখার উপর লম্ব এবং P : (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

$$\text{বা,}\quad a(y-y_1) - b(x-x_1) = 0.$$

যদি এই লম্বরেখা L রেখাকে M বিন্দুতে ছেদ করে এবং যদি M এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) ধরা যায়, তবে, যেহেতু M উভয় রেখার উপর অবস্থিত, (চিত্র 5.13) অতএব

$$a(y_2 - y_1) - b(x_2 - x_1) = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $ax_2 + by_2 + c = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(ii)কে এইভাবে লেখা যায় (ax_1+by_1 কে যোগ ও বিয়োগ করিয়া):

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c+ax_1+by_1=0$$

বা, $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-(ax_1+by_1+c) \quad \cdots \quad (iii)$

(i) ও (iii) হইতে, বর্গ করিয়া ও যোগ করিয়া, পাওয়া যায়

$$(a^2+b^2)\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}=(ax_1+by_1+c)^2.$$

সুতরাং,

$$|\overline{MP}| = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

অনুশীলনী

প্রথম পাঁচটি প্রশ্নের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে প্রদত্ত রেখা হইতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর:

	বিন্দু	রেখা
1.	(5, 2);	$3x-4y+6=0.$
2.	(6, −1);	$3x-y+1=0.$
3.	(3, 4);	$2x+5=0.$
4.	(−2, −5);	$y=0.$
5.	মূলবিন্দু;	$3x+2y-6=0.$

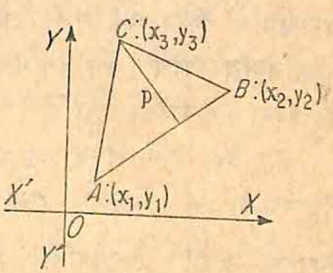
6. যে ত্রিভুজের শীর্ষতিনটি (2, 0), (3, 5) এবং (−1, 2) বিন্দুতে অবস্থিত তাহার উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[উঃ 1. 13/5. 2. $2\sqrt{10}$. 3. 11/2. 4. 5. 5. $\frac{6}{13}\sqrt{13}$. 6. $\frac{17\sqrt{26}}{26}, \frac{17}{5}, \frac{5\sqrt{13}}{13}$.]

উদা. 11. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, যখন শীর্ষত্রয় প্রদত্ত (অনুচ্ছেদ 5·12এর প্রয়োগ)

দ্বিতীয় প্রণালী (অনুচ্ছেদ 2·5 দ্রষ্টব্য):

ধরা যাক্ ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2), C : (x_3, y_3). ইহার **ক্ষেত্রফল** নির্ণয় করিতে হইবে (চিত্র 5.14).



চিত্র 5.14. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

যে কোন একটি শীর্ষ, ধরা যাক্ C(x_3, y_3), হইতে বিপরীত বাহু ABর উপর লম্বপাত করা হইল। তাহা হইলে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}p.\overline{AB}$, যেখানে $p=$C হইতে ABর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য। স্পষ্টত, $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y^2-y_1)^2}$.

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সংযোজক রেখা $\overleftrightarrow{AB}$র সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

বা, $x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2=0$

$\therefore$ $p=$ AB রেখা হইতে C এর লম্ব-দূরত্ব

$$=\pm\frac{x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}p.\,\overline{AB}$

$$=\pm\tfrac{1}{2}[x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2]$$

$$=\pm\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2]$$

$$=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ **বর্গ একক**

5·13. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ (Equations of bisectors of angles between two lines)

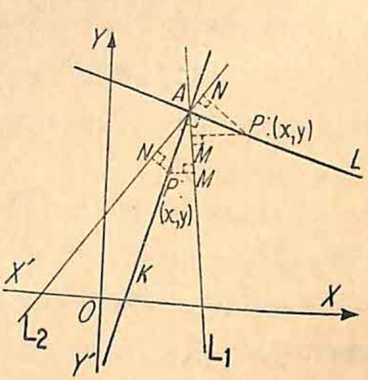
প্রশ্ন। প্রদত্ত : দুইটি ছেদী রেখা

$$L_1 : ax+by+c=0$$

এবং $L_2 : a'x+b'y+c'=0$

ইহাদের অন্তর্গত কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে যে দুইটি রেখা তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ। চিত্র 5.15 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 5.15. কোণের সমদ্বিখণ্ডক

1. সাধারণ চরিত্রটির কোন রূপ হানি না করিয়া ধরা যাইতে পারে যে c এবং c' ধনাত্মক। ইহার অর্থ, উভয় রেখার ক্ষেত্রেই **মূলবিন্দুর পার্শ্ব** (দিক্)কে **ধনাত্মক পার্শ্ব** বিবেচনা করা যাইতে পারে।

2. ধরা যাক্ প্রদত্ত L_1 এবং L_2 রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। উহাদের অন্তর্গত কোণগুলিকে $\overleftrightarrow{AK}$ এবং $\overleftrightarrow{AL}$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

সাধারণতঃ, রেখা দুইটির অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণটির সমদ্বিখণ্ডককে **অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক** এবং অপরটিকে তখন **বহিঃসমদ্বিখণ্ডক** বলা হয়। উভয় রেখারই সমীকরণ নির্ণয় করা হইবে।

3. বিন্দু P : (x, y) যদি এইরূপভাবে সঞ্চার করে যে L_1 হইতে ইহার দূরত্ব $\overline{PM} = L_2$ হইতে ইহার দূরত্ব $\overline{PN}$ হয়, তবে P এর সঞ্চার-পথের সমীকরণ নির্ণয় করিলে অভীষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এই দূরত্ব নির্দেশক রাশিদ্বয় হইল

$$\overline{PM} = \pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \overline{PN} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

4. প্রথমে সমদ্বিখণ্ডক $\overleftrightarrow{AK}$ সম্পর্কে (চিত্র 5.15) বিবেচনা করা যাক্। ইহা মূলবিন্দুর ধারক কোণটির সমদ্বিখণ্ডক। ইহার উপর যে কোন বিন্দু P, L_1 এবং L_2 উভয় রেখারই মূলবিন্দুর পার্শ্বে (দিকে) অবস্থিত; আর তাহা না হইলে উভয় রেখারই মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং লম্ব $\overline{PM}$ এবং $\overline{PN}$ এর দৈর্ঘ্য-নির্দেশক রাশি দুইটি হয় **উভয়ই** ধনাত্মক নতুবা **উভয়ই** ঋণাত্মক। যে কোন ক্ষেত্রে, এই সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন বিন্দুর পক্ষে এই সম্পর্ক, যথা :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

বজায় থাকে। সুতরাং যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু রহিয়াছে তাহার সমদ্বিখণ্ডক ($\overleftrightarrow{AK}$) এর ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

5. এখন অপর সমদ্বিখণ্ডিত $\overleftrightarrow{AL}$ কে বিবেচনা করিতে হইবে। ইহার উপর যে কোন বিন্দুর অবস্থান এইরূপ যে মূলবিন্দু ও ঐ বিন্দু P, L_1 এর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে এবং L_2 এর একই পার্শ্বে **নতুবা** L_1 এর একই পার্শ্বে এবং L_2 এর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়! সুতরাং L_1 এবং L_2 এর উপর লম্ব $\overline{PM}$ এবং $\overline{PN}$ এর দৈর্ঘ্য সূচক রাশি দুইটির একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক। যে কোন ক্ষেত্রে, এই সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P এর পক্ষে এই সম্পর্কটি, যথা :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{a'x+b'x+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

সর্বদা বজায় থাকে এবং ইহাই হইল, মূলবিন্দু যে কোণটির অন্তর্গত নহে তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

6. সুতরাং সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ হইল

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

যেখানে ধনাত্মক চিহ্ন (উপরের চিহ্নটি) সেই সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ দিবে, যাহা মূলবিন্দুর ধারক কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে (যদি অবশ্য c এবং c' উভয়কেই ধনাত্মক লওয়া হয়)।

উদা. 12. $3x-4y-2=0$ এবং $5x+12y+6=0$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমীকরণ দুইটিকে এইভাবে লেখা হইল যেন ধ্রুবক পদগুলি ধনাত্মক হয়, যথা :

$$2-3x+4y=0 \text{ এবং } 6+5x+12y=0$$

সুতরাং মূলবিন্দু যে কোণের অন্তর্ভুক্ত তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{2-3x+4y}{\sqrt{(-3)^2+(4^2)}}=\frac{6+5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

অর্থাৎ $13(2-3x+4y)=5(6+5x+12y)$

অর্থাৎ $16x+2y+1=0.$

অপর সমদ্বিখণ্ডকটির সমীকরণ হইল

$$\frac{2-3x+4y}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{6+5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

অর্থাৎ $8y-x+4=0.$

উদা. 13. কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A, B, C বিন্দুগুলি হইল যথাক্রমে

$(1,2)$, $(25,8)$ এবং $(9,21)$;

ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

$\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ বাহুগুলির সমীকরণ সহজেই নির্ণেয়—তাহারা হইল যথাক্রমে

$$13x+16y-453=0,\ 19x-8y-3=0 \text{ এবং } x-4y+7=0.$$

ইহাদের এইরূপভাবে লিখিতে হইবে যেন উহাদের ধ্রুবক পদগুলি সকলে ধনাত্মক হয়, যেমন

$$453-13x-16y=0,\ 3-19x+8y=0 \text{ এবং } x-4y+7=0.$$

$\overleftrightarrow{BC}$ এবং $\overleftrightarrow{CA}$ এর অন্তর্বর্তী **যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু নহে**, তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{453-13x-16y}{\sqrt{13^2+16^2}}=-\frac{3-19x+8y}{\sqrt{19^2+8^2}}$$

ইহাই ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 5.16)।

$\overleftrightarrow{CA}$ এবং $\overleftrightarrow{BA}$ এর অন্তর্বর্তী **যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু**, তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

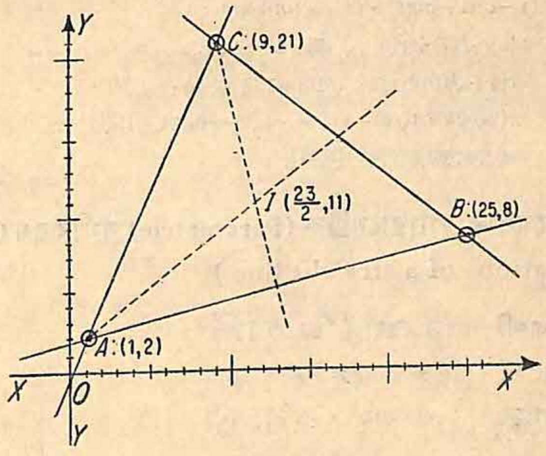
$$\frac{3-19x+8y}{\sqrt{19^2+8^2}}=+\frac{x-4y+7}{\sqrt{1^2+4^2}}$$

লক্ষ্য কর, ইহাই BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 5.16)।

এই দুই সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র। সুতরাং কেন্দ্রটি পাওয়া যাইবে নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে, যথা :

$$\frac{453-13x-16y}{5\sqrt{17}}=\frac{19x-8y-3}{5\sqrt{17}}=\frac{4y-x-7}{\sqrt{17}}$$

x এবং y সমাধানপূর্বক নির্ণেয় অন্তর্বৃত্তের স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{23}{2}, 11\right)$.



চিত্র 5.16

অনুশীলনী

নিম্নে প্রদত্ত রেখাগুলির অন্তর্বর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর (প্রঃ 1—প্রঃ 5) :

1. $13x-9y=10$ এবং $x+3y=6$.
2. $2x+y+1=0$ এবং $11x+2y=2$.
3. $y=3x$ এবং $x+y=1$.

4. $3x-4y+7=0$ এবং $12x-5y-8=0$.

5. $y-b=\dfrac{2m}{1-m^2}(x-a)$ এবং $y-b=\dfrac{2m'}{1-m'^2}(x-a)$.

6. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ

$3x+5y=15,\ x+y=4$ এবং $2x+y=6$,

তাহার অন্তঃস্থ কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. প্রশ্ন 6 এর অনুরূপ—এখানে বাহুগুলির সমীকরণ তিনটি ধর

$7x-y+11=0,\ x+y-15=0$ এবং $7x+17y+65=0$,

অন্তঃকেন্দ্রের (in-centre) স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

[উঃ 1, $2x-6y+5=0$; $9x+3y=20$, 2, $21x+7y+3=0$; $x-3y=1$,

3, $(3\pm\sqrt{5})x-(1\mp\sqrt{5})y=\pm\sqrt{5}$,

4, $99x-77y+51=0$; $21x+27y-131=0$,

5, $(y-b)(m+m')+(x-a)(1-mm')=0$;

$(y-b)(1-mm')-(x-a)(m+m')=0$,

6, $x(3+\sqrt{17})+y(5+\sqrt{17})=15+4\sqrt{17}$;

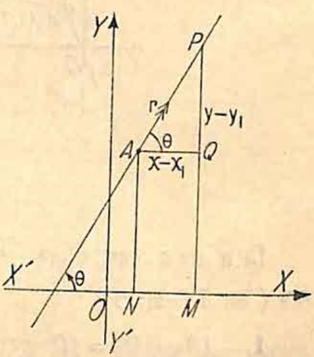
$x(4+\sqrt{10})+y(2+\sqrt{10})=12+4\sqrt{10}$;

$x(2\sqrt{34}-3\sqrt{5})+y(\sqrt{34}-5\sqrt{5})=6\sqrt{34}-15\sqrt{5}$,

7, অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(5,\ 1)$,]

5·14. সরলরেখার 'প্যারামেট্রিক' (Parametric) সমীকরণ (Parametric Equations of a straight line)

ধরা যাক্, একটি প্রদত্ত রেখা (চিত্র 5.17), ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ ($\neq 90°$) কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। ধরা যাক্ A : $(x_1,\ y_1)$ প্রদত্ত রেখার উপর প্রদত্ত একটি বিন্দু।



চিত্র 5.17

রেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল। ধরা যাক P এর স্থানাঙ্ক $(x,\ y)$।

আরও ধরা যাক্ দিক-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{AP}=r$; তাহা হইলে চিত্র হইতে,

$\overline{AQ}=\overline{NM}=\overline{OM}-\overline{ON}=x-x_1$,

$\overline{QP}=\overline{MP}-\overline{MQ}=\overline{MP}-\overline{NA}=y-y_1$;

আবার △PAQ হইতে,

$$r\cos\theta = x - x_1$$

এবং $r\sin\theta = y - y_1$

ইহাদের এইভাবে লেখা হইল, যথা :

$$x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

বা, $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) অথবা (ii), রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কটি প্রকাশ করে ; সুতরাং (i) অথবা (ii) রেখাটির সমীকরণ।

মন্তব্য 1. r এর মান ঋণাত্মক হইবে যদি P বিন্দুটি Aর অপরদিকে অবস্থিত হয় (চিত্র 6.17 দ্রষ্টব্য)।

2. r যে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইতে পারে ইহা ধরিয়া লইয়া রেখাটির উপর অবস্থিত **যে কোন বিন্দুর** স্থানাঙ্ক হইল

$$\boldsymbol{x_1 + r\cos\theta} \quad \text{এবং} \quad \boldsymbol{y_1 + r\sin\theta} \quad \cdots \quad (iii)$$

এইভাবে রেখাটির **যে কোন বিন্দুর** স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y):কে একটিমাত্র অজ্ঞাত চল r [x_1, y_1 এবং θ জ্ঞাত থাকায়] এর সাহায্যে প্রকাশ করা হইয়াছে। এই ক্ষেত্রে বলা হইয়া থাকে যে "x এবং y কে একটি **প্যারামিটার (parameter) r** এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হইয়াছে।" সমীকরণদ্বয় (i) কে রেখাটির 'প্যারামেট্রিক' (parametric) সমীকরণ বলা হয়। (iii) হইতে রেখাটির যে কোন বিন্দু P এর **প্যারামেট্রিক (parametric) স্থানাঙ্ক দুইটি** পাওয়া যায়।

উদা. 14. একটি রেখার প্রবণতা $\frac{3}{4}$ এবং উহা P : (−2, −5) বিন্দুগামী। রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু Q : (x, y) এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। যদি $\overline{PQ} = 10$ হয়।

$$x = -2 + 10\cos\theta,\ y = -5 + 10\sin\theta,$$

এখানে দেওয়া আছে যে $\tan\theta = \frac{3}{4}$;

ফলে $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$ এবং $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$ [দুইটিই + অথবা দুইটিই −]

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 10\times\frac{4}{5} \\ \text{এবং } y = -5 + 10\times\frac{3}{5} \end{array}\right\}$ বা, $\left.\begin{array}{l} -2 + 10\times(-\frac{4}{5}) \\ -5 + 10\times(-\frac{3}{5}) \end{array}\right\}$

$\therefore$ Q **হইল (6, 1) বিন্দু** বা, **(−10, −11) বিন্দু**।

উদা. 15. (1, 2) বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা কি অভিমুখে অঙ্কিত হইলে উহার $x+y=4$ রেখার সহিত ছেদবিন্দুটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ একক দূরত্বে অবস্থিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

যদি রেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ কোণ করে, তবে রেখাটির উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দুইটি হইল

$$x=1+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\cos\theta$$
$$y=2+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\sin\theta$$

এইরূপ একটি বিন্দু অবশ্যই $x+y=4$ রেখার উপরও অবস্থিত হইবে।

$$\therefore\ 1+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\cos\theta+2+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\sin\theta=4$$

বা, $$\cos\theta+\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

বা, $$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \sin(\theta+45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta+45^\circ=60^\circ,\ \text{বা},\ 120^\circ$$

$$\therefore\ \theta=15^\circ,\ \text{বা},\ 75^\circ.$$

অনুশীলনী

1. A হইল $(-5, -3)$ বিন্দু এবং B, $x-3y-1=0$ রেখার উপর অবস্থিত। $\overline{AB}$, x-অক্ষের সহিত একটি সূক্ষ্ম কোণে নত, যাহার tangent হইল $\frac{5}{12}$; $\overline{AB}$র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ 13 একক]

2. $\frac{5}{12}$ প্রবণতার একটি রেখা A : $(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দুগামী ; রেখাটির উপর অবস্থিত কোন বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যেখানে $\overline{AB}=\frac{13}{2}$. [উঃ $(9, -1)$ বা $(-3, -6)$]

5·15. কতিপয় সাধারণ পদ্ধতি : সমবিন্দুতা (Concurrence)

উদা. 16(*a*). নিম্নের উক্তিটি যাচাই করিতে হইবে :

দুইটি প্রদত্ত রেখা, যথা :

$$L_1\equiv ax+by+c=0 \quad \cdots \quad (i)$$
$$L_2\equiv a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

এর ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণকে নিম্নের আকারে, যথা :

$$(ax+by+c)+\lambda(a'x+b'y+c')=0 \quad \cdots \quad (iii)$$

লেখা যায়, যেখানে λ হইল যে কোন অনির্দিষ্ট (arbitrary) ধ্রুবক।

ধরা যাক A : (x_1, y_1) হইল (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ Aর স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) উভয়কেই সিদ্ধ করিবে ; সুতরাং

$$ax_1+by_1+c=0$$

এবং $$a'x_1+b'y_1+c'=0.$$

$\therefore$ (x_1, y_1), λর যে কোন মানে (iii) কে সিদ্ধ করে, এবং ফলে (x_1, y_1) হইল (iii) এর সঞ্চারপথের উপর একটি বিন্দু।

কিন্তু (iii) হইল x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সমীকরণ, যথা :

$$x(a+\lambda a')+y(b+\lambda b')+c+\lambda c'=0,$$

সুতরাং ইহা একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

$\therefore \lambda$ র যে কোন মানে (iii) সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু A গামী একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

উদা. 16(*b*). $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x-y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি : $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$x+2y+3+\lambda(3x+4y+7)=0,$$

যেখানে λ হইল যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক,

বা, $$x(1+3\lambda)+y(2+4\lambda)+3+7\lambda=0 \quad \cdots (i)$$

এই রেখার প্রবণতা $=-\dfrac{1+3\lambda}{2+4\lambda}$.

রেখা (i), $x-y+8=0$ রেখার উপর লম্ব হইবে, যদি

$$-\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}\times 1=-1, \quad \text{অর্থাৎ যদি } \lambda=-1.$$

λ এর এই মান লইয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হয় [(i) এ $\lambda=-1$ ধরিয়া]

$$x(1-3)+y(2-4)+3-7=0$$

বা, $$x+y+2=0.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া ইহাদের সাধারণ বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় :

$$x_1=-1, \ y_1=-1$$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা $(-1, -1)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং $x-y+8=0$ রেখার উপর লম্ব।

সুতরাং ইহার সমীকরণের আকার হইবে

$$y+x+c=0, \text{ যেখানে } c=2$$

[(−1, −1) বিন্দুটা রেখাটির উপর অবস্থিত এই বিবেচনা হইতে c এর মান পাওয়া যায়]। সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x+y+2=0.$$

উদা. 17(*a*). উক্তিটি যাচাই কর :

এই **তিনটি রেখা**, যথা :

$$L_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots (i)$$

$$L_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots (ii)$$

$$L_3 \equiv a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots (iii)$$

সমবিন্দু (concurrent) হইবে, যদি এমন তিনটি ধ্রুবক k, l, m (সকলেই শূন্য নহে) বিদ্যমান হয় যাহাতে

$$k(a_1x+b_1y+c_1)+l(a_2x+b_2y+c_2)+m(a_3x+b_3y+c_3)=0 \cdots (iv)$$

এই সম্বন্ধ অভেদ গুণসম্পন্নভাবে বজায় থাকে (holds identically) অর্থাৎ x এবং y এর সকল মানের জন্যই অভেদটি সিদ্ধ হয়)

ধরা যাক্ (*i*) এবং (*ii*) রেখা পরস্পরকে (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করে ; সুতরাং

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$$

$$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$$

∴ (*iv*) সমীকরণ হইতে,

$$a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$$

[∵ (*iv*) x এবং y এর সকল মানে বজায় থাকে,

∴ $x=x_1$ এবং $y=y_1$ মানেও উহা বজায় থাকে।]

∴ (x_1, y_1) বিন্দু (*iii*) এর উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ (*i*), (*ii*), (*iii*) রেখাত্রয় সমবিন্দু, যদি (*iv*) সম্পর্কটি বজায় থাকে।

মন্তব্য : তিনটি সরলরেখার সমবিন্দুতা প্রমাণের ইহা শ্রেষ্ঠতর পদ্ধতি। কিন্তু, যদি k, l, m ধ্রুবক তিনটি সহজে নির্ণয় করা না যায়, তাহা হইলে ছাত্রছাত্রীরা নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে পারে :

1. (*i*) ও (*ii*) এর ছেদবিন্দু (x_1, y_1) নির্ণয় কর, যথা :

$$x_1=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y_1=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

2. এই বিন্দু (*iii*) এর উপর অবস্থিত হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$a_3.\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_3.\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0 \text{ হয়।}$$

3. সুতরাং তিনটি রেখা (*i*), (*ii*) এবং (*iii*) এর সমবিন্দুতার জন্য নিম্নলিখিত সর্তটিকে অবশ্যই বজায় থাকিতে হইবে, যথা :

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

ছক আকারে (in the determinant form) শর্তটি হইল :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

উদা. 17(*b*). দেখাও যে রেখাত্রয়

$x-4y+2=0,\ 4x-y+3=0,\ x+2y=0$ একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রথম পদ্ধতি : পর্যবেক্ষণ দ্বারা দেখা যায় যে 3, −2 এবং 5 এমন তিনটি ধ্রুবক যে

$$3(x-4y+2)-2(4x-y+3)+5(x+2y)\equiv 0.$$

সুতরাং রেখা তিনটি সমবিন্দু।

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $x-4y+2=0,\ 4x-y+3=0$ সমাধান করিয়া ইহাদের ছেদবিন্দু (x_1, y_1) পাওয়া যায়, যেখানে $x_1=-2/3,\ y_1=1/3.$ $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ বিন্দু তৃতীয় সমীকরণ $x+2y=0$ কে সিদ্ধ করে। সুতরাং রেখা তিনটি সমবিন্দু এবং সাধারণ বিন্দুটি হইল $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ ফলসমূহ : সংক্ষেপ

(Useful results : A summary)

1. কোন রেখার প্রবণতা $=m=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$

2. দুইটি রেখা সমান্তরাল যদি এবং কেবলমাত্র যদি $m=m'$.
   দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব যদি এবং কেবলমাত্র যদি $m\times m'=-1.$

3. L_1 রেখা হইতে L_2 রেখা পর্যন্ত কোণ ϕ হইলে

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

4. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা : $x=k$(y-অক্ষের সমান্তরাল)
   $y=l$(x-অক্ষের সমান্তরাল)

   x-অক্ষের সমীকরণ : $y=0$

   y-অক্ষের সমীকরণ : $x=0.$

5. সরলরেখার সমীকরণ :

(a) বিন্দু-প্রবণতা আকার : $y-y_1=m(x-x_1)$.

(b) প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : $y=mx+c$.

(c) দুইটি বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দিয়া যাইলে :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(d) ছেদিতাংশ-আকার : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(e) অভিলম্ব-আকার : $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

(f) 'প্যারামেট্রিক'-আকার : $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$.

6. প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ : $ax+by+c=0$ কে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ :

(a) প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. $(b\neq0)$

(b) ছেদিতাংশ আকার : $\frac{x}{-c/a}+\frac{by}{-c/b}=1$. $(a, b, c\neq0)$

(c) অভিলম্ব আকার :

$$-\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}=+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c>0$$

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c<0.$$

7. দুইটি রেখার ছেদবিন্দু (x_1, y_1) নির্ণয়ের জন্য
সমীকরণ দুইটি সমাধান কর : $ax+by+c=0$ এবং $a'x+b'y+c'=0$.

8. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয়ের জন্য রেখা দুইটির প্রবণতা নির্ণয় কর এবং উপরের 3 সূত্র প্রয়োগ কর।

9. (a) দুইটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাহাদের সমীকরণগুলির আকার হয় :

$$ax+by+c=0 \text{ এবং } ax+by+c'=0.$$

(b) দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি উহাদের সমীকরণগুলির আকার হয়ঃ

$$ax+by+c=0 \text{ এবং } bx-ay+c'=0.$$

10. $ax+by+c=0$ এর ধ্রুবক পদ c কে সর্বদা ধনাত্মক কর।

যদি ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c এর চিহ্ন একই হয়, তবে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ এর একই পার্শ্বে, নতুবা উহারা রেখাটির পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

11. $ax+by+c=0$ রেখা হইতে P : (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্বের সাংখ্যমান হইল

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

12. দুইটি রেখা, যথাঃ

$L_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $L_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$

এর অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ (c_1 এবং c_2 ধনাত্মক ধরিয়া) হইল :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{+\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

যেখানে উপরের চিহ্নটি (+) মূলবিন্দুর ধারক কোণের সমদ্বিখণ্ডক দিবে।

13. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণের আকার

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

যেখানে λ হইল অনির্দিষ্ট যে কোন ধ্রুবক।

14. তিনটি রেখা $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$ সমবিন্দু; যদি, সকলে শূন্য নহে এইরূপ তিনটি ধ্রুবক k, l, m পাওয়া যায় যাহাতে

$$k(a_1x+b_1y+c_1)+l(a_2x+b_2y+c_2)+m(a_3x+b_3y+c_3)=0 \text{ হয়।}$$

15. 14 নং এর তিনটি রেখার সমবিন্দু হইবার সর্ত হইল

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

বা, $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$

অধ্যায় 5 এর উপর
বিবিধ প্রশ্নমালা
[A]

1. $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ বিন্দুগামী যে রেখা x-ছেদিতাংশ $a/\cos\theta$ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. সরলরেখা $x+ay=a$, x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে ; যদি $\overline{OA}=3\overline{OB}$ হয়, তবে $\overleftrightarrow{AC}$র সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে C হইল $(0, -9)$ বিন্দু এবং দেখাও যে $\overline{AC}$, $\overline{AB}$র উপর লম্ব।

3. $8x-2y-3=0$ এবং $kx-5y+2=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর $\pi/4$ কোণে নত ; প্রমাণ কর যে $k=3$ বা $-25/3$.

4. দেখাও যে রেখাদ্বয় $(1-m)y-(1+m)x=c$ এবং $y=mx+c$ পরস্পর 45° কোণে নত।

5. A, B, C হইল বিন্দু $(-1, 2)$, $(8, 5)$, $(4, 9)$; D বিন্দু ABর উপর অবস্থিত এবং $\overline{AD}:\overline{DB}=1:2$; $\overleftrightarrow{DC}$'র সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. P : (α, β) বিন্দু, $y=6x+1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং Q : (β, α) বিন্দু $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত ; $\overleftrightarrow{PQ}$ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. বিন্দু P : $(-2, -3)$, রেখা $\overleftrightarrow{AB}$র উপর অবস্থিত, যাহার সমীকরণ হইল $4x+ky=1$; যদি $\overline{AP}=\overline{PB}=10$ হয়, তবে A এবং B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[এখানে প্যারামেট্রিক সমীকরণ সুবিধাজনক হইবে।]

8. নিম্নের প্রত্যেক রেখাযুগল যাচাই করিয়া বল, উহারা সমান্তরাল অথবা লম্ব কিনা ; যখন উহারা দুইটির কোনটিই নয় তখন উহাদের অন্তর্গত কোণের ত্রিকোণমিতিক tangent নির্ণয় কর :

(i) $2x-3y+1=0$ এবং $16x-24y+7=0$

(ii) $x+2y+4=0$ এবং $x-3y+2=0$

(iii) $2x+3y+6=0$ এবং $6x-4y+3=0$

(iv) $3x+4y-7=0$ এবং $2x+5y+7=0$.

9. $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যদি উহা রেখা $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$ এর উপর লম্ব হয়।

10. (1, 2) বিন্দু হইতে $4x-3y+2=0$ রেখা বরাবর $x-2y-2=0$ রেখা পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

[B]

1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A : (−3, 3), B : (−5, −1) এবং C : (4, −4) ; উহার পরিকেন্দ্র (circum-centre) নির্ণয় কর।

2. (−2, −3), (6, 1) এবং (1, 6) যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তাহার লম্ব-বিন্দু (ortho-centre) নির্ণয় কর।

3. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (3, −4), (−5, 4), (−3, −8) হইলে উহার ভরকেন্দ্র (centroid) নির্ণয় কর।

4. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ

$$78x+8y=5,\ 11x+y+50=0 \text{ এবং } 4x-7y=26\ ;$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে m এর সকল মানে $(a, 0)$ হইতে $y=mx+a/m$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থিত হইবে।

6. x-অক্ষ এবং y-অক্ষের উপর $\overleftrightarrow{AB}$ যথাক্রমে ছেদিতাংশ $2a$ এবং a, এবং $\overleftrightarrow{CD}$ যথাক্রমে ছেদিতাংশ $-a$ এবং $2a$ উৎপন্ন করে ; দেখাও যে $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ $3x+y=0$ রেখার উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

7. দেখাও যে $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ রেখাকে নিম্নলিখিত

$$\frac{x-p \cos \alpha}{-\sin \alpha}=\frac{y-p \sin \alpha}{\cos \alpha}=r \text{ আকারে লেখা যায়।}$$

8. কোন চতুর্ভুজের ক্রম-অনুসারে গৃহীত দুইটি বাহুর সমীকরণ হইল

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad \cdots \quad (i)$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta = p_1 \quad \cdots \quad (ii)$$

এবং মূলবিন্দু হইতে (ii) এবং (i) এর উপর অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p_1 এবং p ; দেখাও যে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল

$$=\frac{2pp_1-(p^2+p_1{}^2)\ \cos (\beta-\alpha)}{2 \sin (\beta-\alpha)}.$$

9. $5x-12y-5=0$ এবং $5x-12y+21=0$, এই দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে $2x-3y+1+k(3x+y-1)=0$, $l(2x-3y+1)-(3x+y-1)=0$ এবং $x-7y+3=0$ এই রেখাগুলি সমবিন্দু।

[C]

1. একটি সঞ্চারমান রেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষের উপর এইরূপ ছেদিতাংশ a এবং b উৎপন্ন করে যেন $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ হয়; দেখাও যে উহা সকল অবস্থানে অবশ্যই $(6, 6)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

2. $x \cos \theta+y \sin \theta=p$ রেখা A, B বিন্দুতে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষকে ছেদ করে; θ চল (variable) হইলে দেখাও যে $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$.

3. A, B হইল বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এবং P, $\overline{AB}$কে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে; P, $Ax+By+C=0$ রেখার উপর অবস্থিত ; দেখাও যে

$$\frac{m}{n}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

ইহা হইতে $Ax+By+C=0$ রেখা সম্পর্কে A এবং B এর অবস্থান নির্ণয়ের **একটি** সূত্র নিরূপণ কর (**অনুচ্ছেদ 5·11**)।

4. $3x-4y+1=0$ রেখা $(4, -3)$ এবং $(5, -1)$ এর সংযোজক রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে $x-y+2=0$, $3x+y+4=0$ এই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, নিম্নলিখিত রেখাদ্বয়, যথা : $x-4y+3=0$, $9x-2y+1=0$ এর অন্তর্গত কোণের সমান।

6. $x-3y-2=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $(2, 3)$ ও $(6, -5)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে নিম্নে প্রদত্ত রেখাদ্বয়, যথা :

$$x \sin \theta-y(\cos \theta-1)=a \sin \theta$$

এবং $x \sin \theta-y(\cos \theta+1)=-a \sin \theta$

এর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$.

8. $x+y-5=0$ এবং $x-2y+4=0$ রেখাদ্বয়ের সহিত সমবিন্দু যে রেখার প্রবণতা $\frac{4}{3}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. দেখাও যে নিম্নলিখিত রেখাগুলি, যথা :

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$$

$$-\frac{x}{a}\sin\theta+\frac{y}{b}\cos\theta=1$$

$bx+ay\tan(\theta-\pi/4)=0$ হইল সমবিন্দু।

[D]

1. $(-3, 1)$ বিন্দুগামী এবং $5x-2y+7=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $2x-7y+11=0$ এবং $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা

(*i*) মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

(*ii*) $2x-5y+6=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

(*iii*) অক্ষদ্বয়ের উপর সমচিহ্নের সমান ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে।

3. $(-2, 7)$ এবং $(8, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। মূল-বিন্দু হইতে এই লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক কত দূরে অবস্থিত ?

4. যে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি $(2, 7)$, $(-6, 1)$ এবং $(4, -5)$, তাহার লম্ব-বিন্দু নির্ণয় কর।

5. $(3, 2)$ এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণটিকে ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ কর।

এই রেখা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় হইতে যে ত্রিভুজ ছিন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে বিন্দুত্রয় $(3, 1)$, $(5, -5)$ এবং $(-1, 13)$ সমরেখ। যে রেখার উপর উহারা অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ এবং $(5, 6)$। যদি ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 12 বর্গএকক হয়,তবে উহার তৃতীয় শীর্ষের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. একটি সঞ্চারমান রেখা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এইরূপভাবে গতিশীল যে $a+b=10$; উহার যে অংশ অক্ষদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত তাহার মধ্যপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $3x+4y=24$ রেখা y-অক্ষকে A এবং x-অক্ষকে B তে ছেদ করে। $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখককে $(0, -1)$ বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা C তে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে ACB এক সমকোণ।

10. $2x+6y-1=0$, $4x-2y-9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[E]

1. $(0, a)$ বিন্দুগামী এমন দুইটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহাদের উপর $(2a, 2a)$ বিন্দু হইতে পতিত লম্বদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য a ;

আরও প্রমাণ কর যে এই দুই লম্বের পাদবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল $y+2x=5a$.

2. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে (বিশ্লেষণমূলক প্রমাণ)

(i) A, B এবং C কোণের সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু ;

(ii) মধ্যমাগুলি একবিন্দুগামী ;

(iii) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি একই বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

3. মূলবিন্দু এবং $x-y-4=0$ ও $7x+y+20=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর; ইহাও প্রমাণ কর যে এই রেখা প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. যে সরলরেখা $2x-3y=10$ এবং $x+2y=6$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও $16x-10y=33$ এবং $12x+14y+29=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া গমন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. (a) প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত সরলরেখাসমূহ, যথা :

$$\sqrt{3}x+y=0, \quad \sqrt{3}y+x=0, \quad \sqrt{3}x+y=1, \quad \sqrt{3}y+x=1$$

যে সামান্তরিক উৎপন্ন করে তাহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

(b) প্রশ্নটি 5(a)র অনুরূপ ; কেবল রেখাগুলি এখানে

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \; \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1, \; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2, \; \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2.$$

6. কোন বর্গের একটি বাহু x-অক্ষের উপর α কোণে নত এবং বাহুটির একটি প্রান্তবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত ; প্রমাণ কর যে উহার কর্ণ দুইটির সমীকরণ হইল

$$y(\cos\alpha-\sin\alpha)=x(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

এবং $y(\sin\alpha+\cos\alpha)+x(\cos\alpha-\sin\alpha)=a$,

যেখানে a হইল বর্গটির বাহুর দৈর্ঘ্য।

7. (h, k) বিন্দু হইতে $Ax+By+C=0$ সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুগামী এবং ঐ লম্ব ও প্রদত্ত রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. যে সরলরেখাগুলির সমীকরণ $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = a$ এবং $x \cos\theta \quad y \sin\theta = a \cos 2\theta$, তাহাদের উপর মূলবিন্দু হইতে লম্ব দুইটি যদি p এবং p' হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4p^2 + p'^2 = a^2$.

9. যে সরলরেখাগুলি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং $\sqrt{3}x + y = 1$ রেখার সহিত 60° কোণে নত তাহাদের **সমীকরণগুলি** নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

[A]

1. $x \cos\theta + y \sin\theta = a$.
2. $3x - y - 9 = 0$.
5. $3x - y - 3 = 0$.
6. $x + y - 6 = 0$.
7. $(4, 5)$ এবং $(-8, -11)$.
8. (*i*) সমান্তরাল ; (*ii*) $\tan\theta = \pm 1$. (*iii*) লম্ব ; (*iv*) $\tan\theta = \pm 7/26$.
9. $a \cos\theta x + b \cot\theta y = a^2 + b^2$.
10. 5 একক।

[B]

1. $(0, -1)$.
2. $(3,$ [illegible]$)$.
3. $(-5/3, -8/3)$.
4. $8\frac{1}{2}$ বর্গ একক।
9. 2 একক।

[C]

4. $-5 : 4$.
6. $(14, 4)$.
8. $4x - 3y + 1 = 0$.

[D]

1. $2x + 5y + 1 = 0$
2. (*i*) $27x - 23y = 0$ (*ii*) $5x + 2y = 13$; (*iii*) $13x + 13y = 50$,
3. $5x - 4y = 3$; $\frac{3}{\sqrt{41}}$ একক।
4. $\left(-\frac{10}{9}, \frac{49}{27}\right)$.
5. $\frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7} = 1$; $8\frac{1}{6}$ বর্গ একক।
6. $3x + y = 10$,
7. $y = 2x + 8$, $y = 2x - 16$,
8. $x + y = 5$,
10. $3x + 4y = 4$.

[E]

1. $y = a$; $3y = 4x + 3a$.
3. $y = 3x$.
4. $13x - 23y = 64$.
7. $A(y - k) - B(x - h) = \pm(Ax + By + C)$.
9. $y = -2$ এবং $y - \sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$.

TEST PAPERS

I

[সময় : 2 ঘণ্টা]

1. নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি গতিশীল রেখাংশ APB, x-অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে ; $|\overline{AP}| = b$, $|\overline{PB}| = a$;

প্রমাণ কর যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2. দেখাও যে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) বিন্দুগামী রেখার মেরু সমীকরণ (polar equation) হইল

$$\frac{1}{r}\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{r_1}\sin(\theta-\theta_2)+\frac{1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta)=0.$$

3. x-অক্ষের উপর লম্ব এবং P $(a\cos\theta, 0)$ বিন্দুগামী রেখা যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে রেখাদ্বয়

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1, \quad \frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{a}\cos\theta=1.$$

কে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $\overline{PR} : \overline{PQ} = a : b$.

4. ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র এবং পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর, যদি উহার বাহুগুলি হয়

$$x+3y=0, \quad 2x+y=10, \quad x+10=7y.$$

5. দেখাও যে রেখাত্রয় $4x+y-9=0$, $x-2y+3=0$ এবং $5x-y-6=0$ যে কোন একটি 2-প্রবণতাবিশিষ্ট রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

6. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ হইল $\triangle$ABCর লম্বসমূহ ; A, D, E, F হইল $(-4, 5)$, $(\frac{16}{5}, -\frac{23}{5})$, $(4, 1)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দুগুলি ; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ এবং B ও C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. A : $(-5, -4)$গামী একটি রেখা যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে রেখাত্রয় $x+3y+2=0$, $2x+y+4=0$, $x-y-5=0$ কে ছেদ করে ; $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ বিপরীত প্রগতি (harmonic progression) তে আছে ; $\overleftrightarrow{AB}$র সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. A, C, B হইল বিন্দু $(-a, 0)$, $(a\cos\phi, 0)$, $(a, 0)$; রেখাদ্বয় $x\cos\phi+y\sin\phi=a$, $x\cos\phi-y\sin\phi=a$

পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; দেখাও যে D, x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{BD}$.

9. A, B, C, D চারিটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 4)$, $(-7, -2)$, $(3, -4)$, $(5, 1)$; ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ইহা $\overline{BD}$ দ্বারা এবং $5x+y+1=0$ রেখার দ্বারাও সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

10. মনে করা যাক রেখাত্রয় যথা :

$$ax+hy+g=0$$
$$hx+by+f=0$$
$$gx+fy+c=0$$

হইল সমবিন্দু ; দেখাও যে

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

11. kর মান যাহাই হউক না কেন, দেখাও যে রেখা

$$(2k-3)x+(3k-2)y-(4k-1)=0$$

একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া নিত্য গমন করে। উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. $x-3y+1=0$ রেখা, L রেখা এবং $x-y+1=0$ রেখার অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ; L এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. রেখাদ্বয়

$$x+8y+18=0, \; 7x+4y+30=0$$

এর অন্তর্গত কোণের একটি সমদ্বিখণ্ডক x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ছেদ করে, এবং অপরটি এই অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A_1, B_1 বিন্দুতে ছেদ করে ; দেখাও যে $\overline{AB_1}$, $\overline{A_1B}$ পরস্পরকে $(-\frac{14}{5}, \frac{8}{5})$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

14. দেখাও যে A : $(1, -1/m)$ এবং B : $(-1/l, 1)$ বিন্দুদ্বয় হইতে $lx+my+1=0$ রেখার লম্ব-দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অনুপাত $l : m$. মূল বিন্দুগামী যে রেখাগুলির উপর A এবং B হইতে অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্যগুলির অনুপাত $l : m$, তাহাদের প্রবণতা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $(1, -2)$; 5. **6.** $3x-4y-28=0$; $3x+y+7=0$; $x+2y-6=0$; $(0, -7)$, $(8, -1)$; **7.** $x-2y-3=0$. **11.** $(-1, 2)$. **12.** $x+7y+1=0$.
14. $(l-1)/(m-1)$; $-\{(l+1)/(m+1)\}$.

6

বৃত্ত (THE CIRCLE)

6·1. সূচনা

বৃত্তের সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া যাইতে পারে, যথা : কোন সমতলে একটি স্থির বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরত্ব বজায় রাখিয়া যে বিন্দু গতিশীল থাকে তাহার সঞ্চারপথ (locus)কে **বৃত্ত** বলা হয়। স্থির বিন্দুটিকে উহার **কেন্দ্র** (centre) এবং নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক দূরত্বটিকে উহার **ব্যাসার্ধ** (radius) বলে। এই সঞ্চারপথটির সমীকরণ নিরূপণ করাই হইল বর্তমান অধ্যায়ের উদ্দেশ্য।

6·2. বৃত্তের সমীকরণ (Equation to a circle)

A. কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a হইলে বৃত্তটির সমীকরণ :

$$x^2+y^2=a^2.$$

এখানে প্রশ্নটি হইল, মূলবিন্দু হইতে যে P : (x,y) বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা a, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করা ;

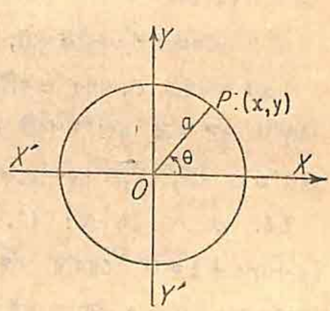
সঞ্চারপথটির উপর P এর সকল অবস্থানে (চিত্র 6.1)

$\overline{OP}=a$;

সুতরাং, $|\overline{OP}|^2=a^2$;

$\therefore (x-0)^2+(y-0)^2=a^2$

অর্থাৎ, $x^2+y^2=a^2$.



চিত্র 6.1

সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে এই সম্পর্ক বজায় থাকে, কিন্তু পথটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে সম্পর্কটি বজায় থাকে না। সুতরাং ইহাই হইল সঞ্চারপথটির সমীকরণ এবং ঐ সঞ্চারপথ একটি **বৃত্ত**।

টীকা 1. যদি $\overrightarrow{OX}$ কে প্রারম্ভিক রেখা এবং O কে মেরু (pole) ধরা হয় এবং P এর মেরু বা পোলার (polar) স্থানাংক লওয়া হয় (r, θ), তবে বৃত্তটির মেরু সমীকরণ (polar equation) হইবে $r=a$.

টীকা 2. কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ জ্ঞাত হইলেই বৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণীত হয়।

উদা. 1. কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং বৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যদি a বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হয় তাহা হইলে সমীকরণটির আকার হইবে,

$$x^2+y^2=a^2.$$

যেহেতু বৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া গমন করে, সুতরাং

$$x_1{}^2+y_1{}^2=a^2.$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2+y^2=x_1{}^2+y_1{}^2.$$

B. কেন্দ্র C যদি (h, k) বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a হয়, তবে বৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

ধরা যাক্,

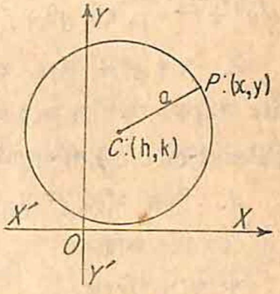
P : (x, y) বিন্দু C : (h, k) হইতে নির্দিষ্ট দূরত্ব a বজায় রাখিয়া নিয়ত গতিশীল ; (চিত্র 6.2)

P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র হইতে, $|\overline{CP}|^2=a^2$

বা, $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$.

সঞ্চারপথটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P : (x,y) এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে, এবং অপর কোনও বিন্দু ইহাকে সিদ্ধ করে না ; সুতরাং ইহাই বৃত্তটির সমীকরণ।



চিত্র 6.2

টীকা। যদি (h, k) বিন্দু মূলবিন্দু $(0, 0)$ হয়, তবে সমীকরণটির আকার হয়, $x^2+y^2=a^2$.

C. সাধারণ আকার (General form)

প্রতিপাদ্য। বৃত্তের সমীকরণকে নিম্নের আকারে প্রকাশ করা যায়, যেমন

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0, \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেখানে একটি বিশেষ বৃত্তের পক্ষে g, f, c **নির্দিষ্ট ধ্রুবক।**

বিপরীতক্রমে, x ও y সংশ্লিষ্ট **(i)** আকারের প্রত্যেক দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে অথবা একটিমাত্র বিন্দুকে প্রকাশ করে অথবা **(i)** কে সিদ্ধ করে এইরূপ স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট কোন বিন্দুই নাই।

প্রমাণ : পূর্বের আলোচনা হইতে বলা যায় যে, কেন্দ্র (α, β) এবং ব্যাসার্ধ a হইলে বৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2,$$

বা, $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-a^2)=0,$

এবং ইহা **(i)** এর আকারের অনুরূপ, যদি $-\alpha=g, -\beta=f, c=\alpha^2+\beta^2-a^2$ ধরা হয়।

বিপরীতক্রমে, x ও y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ যদি নিম্নের আকারে প্রদত্ত থাকে,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

তবে উহাকে এইভাবে লিখিতে পারা যায়, যথা :

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \qquad \cdots \qquad (ii)$$

1. ইহা একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$, যদি $g^2+f^2>c$ হয়।

2. যদি $g^2+f^2=c$ হয়, তবে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু $(-g, -f)$, (ii) সমীকরণকে সিদ্ধ করে। প্রকারান্তরে, সমীকরণ (ii) তখন একটি **বিন্দু-বৃত্ত** **(Point-circle)** বা **শূন্য-বৃত্ত (Null-circle)** কে প্রকাশ করে।

3. কিন্তু যদি $g^2+f^2<c$ হয়, তবে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় (ii) কে সিদ্ধ করিবে।

সংক্ষেপে বলিলে :

সমীকরণ (i) একটি বৃত্তকে, একটি একক বিন্দুকে অথবা এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় (i) কে সিদ্ধ করে এইরূপ অবস্থাকে প্রকাশ করে, যখন নিম্নের রাশিটি,

$$g^2+f^2-c$$

যথাক্রমে ধনাত্মক, শূন্য অথবা ঋণাত্মক হয়।

মন্তব্য : (a) কোন কোন গ্রন্থকার ইহা বলা বাঞ্ছনীয় মনে করেন যে যখন $g^2+f^2-c<0$, তখন (i) সমীকরণ একটি **কাল্পনিক বৃত্ত (Imaginary circle)** কে প্রকাশ করে—কিন্তু এই শব্দটি নবীন শিক্ষার্থীদের মনে বিভ্রান্তি সৃষ্টি করিতে পারে, এই আশঙ্কায় এই পুস্তকে উহা পরিহার করা হইল।

(b) এখানে সকল আলোচনাই করা হইতেছে বাস্তব তলের (real plane) সম্পর্কে, অর্থাৎ x, y কে সর্বদা বাস্তব ধরা হইতেছে।

উদা. 2. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{5}{4}, \frac{8}{3}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{11}{6}$ হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{11}{6}\right)^2,$$

বা, সরল করিলে,

$$144(x^2+y^2)+360x-768y+765=0.$$

মন্তব্য: লক্ষ্য করিতে হইবে যে x^2 এবং y^2 এর একই সহগ (144) এবং xy সংশ্লিষ্ট কোন পদ সমীকরণটিতে নাই। বস্তুত. সমীকরণটিকে (i) এর আকারে এইভাবে লিখিতে পারা যায়, যথা:

$$x^2+y^2+2.\frac{180}{144}x-2.\frac{384}{144}y+\frac{765}{144}=0.$$

উদা. 3. নিম্নে প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর (যেক্ষেত্রে উহা বিদ্যমান):

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

প্রদত্ত সমীকরণ: $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$

1. যদি $A^2+B^2-4C>0$ হয়, তবে সমীকরণটি এমন একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে যাহার কেন্দ্র $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$.

2. যদি $A^2+B^2-4C=0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি একক বিন্দুকে প্রকাশ করে।

3. যদি $A^2+B^2-4C<0$ হয়, তবে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

6·3. দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ (General Equation of the Second Degree)

x এবং y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ এই আকারের হয়, যথা:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

(যেখানে a,b,c,h,g,f ধ্রুবক)।

ক্ষেত্র 1. যদি $a=h=b=0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, যদি g এবং f উভয়েই শূন্য না হয়।

ক্ষেত্র 2. যদি $h=0, a=b(\neq 0)$ হয়, তবে সমীকরণটির আকার তখন হয়

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$$

$$\text{বা, } \left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}.$$

ইহা একটি **বৃত্ত** অথবা একটি **বিন্দু-বৃত্তকে** প্রকাশ করে, যদি যথাক্রমে $g^2+f^2>ac$, অথবা, $g^2+f^2=ac$ হয়। আর $g^2+f^2<ac$ হইলে এমন কোন বিন্দু পাওয়া যাইবে না যাহা এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

স্মরণ রাখিতে হইবেঃ সাধারণভাবে, x এবং y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে, যদি

(*i*) x^2 এর সহগ $=y^2$ এর সহগ ;

এবং (*ii*) xy এর সহগ শূন্য।

উদা. 4. (*i*) সমীকরণ $49x^2+49y^2-14x+28y+5=0$,

যখন $\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\left(y+\frac{2}{7}\right)^2=0$, আকারে লিখিত হয়,

তখন দেখা যায় যে ইহা কেবল একটি বিন্দু $(\frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$ কে প্রকাশ করে।

(*ii*) $x^2+y^2+2x+4y+6=0$ সমীকরণকে নিম্নলিখিত আকারে,

$$(x+1)^2+(y+2)^2=-1$$

লিখিলে দেখা যায় যে কোন বিন্দুই ($\because$ x এবং y উভয়েই বাস্তব বলিয়া এই পুস্তকে ধরা হইবে) ইহাকে সিদ্ধ করে না।

অনুশীলনী

বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নিম্নে প্রদত্ত হইল ; বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

1. কেন্দ্র : $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
2. কেন্দ্র : $(4, 6)$ এবং ব্যাসার্ধ $=3$.
3. কেন্দ্র : $(0, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
4. কেন্দ্র : $(\frac{7}{5}, -\frac{2}{5})$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
5. কেন্দ্র : (a, a) এবং ব্যাসার্ধ $=a\sqrt{2}$.

নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

6. $x^2+y^2+6x-8y=0$.
7. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

8. $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0.$

9. নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলি কি প্রকাশ করে ?

(i) $x^2+y^2-6x+4y+13=0.$

(ii) $x^2+y^2+3=0.$

(iii) $3x^2+3y^2-x+y=6.$

10. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 এবং উহা $x^2+y^2+2x-6y=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয় (concentric); বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. প্রমাণ কর যে $(5, -14)$, $(-10, 11)$, $(2\sqrt{13}, 13)$ বিন্দু তিনটি একটি বৃত্ত-পরিধির উপর অবস্থিত, যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি $(2, 1)$, $(0, 5)$ এবং $(-1, 2)$ বিন্দু তিনটি দিয়া গমন করে ; g, f এবং c নির্ণয় কর।

13. P বিন্দুর সেই সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে P হইতে $(2, 3)$ এবং $(-1, -2)$ পর্যন্ত দূরত্ব দুইটির বর্গের সমষ্টি 34 হইবে।

14. 1 ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট প্রত্যেক বৃত্তের সমীকরণ লিখ।

15. 1 ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট প্রত্যেক বৃত্তের সমীকরণ লিখ, যদি উহার কেন্দ্র $y=-x$ রেখার উপর অবস্থিত হয়।

16. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$—এই সমীকরণটি কি প্রকাশ করিবে, যখন

(i) h এবং k নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং r যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হইবে ?

(ii) h এবং r নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং k যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হইবে ?

(iii) k এবং r প্রদত্ত ধ্রুবক এবং h অনির্দিষ্ট কোন ধ্রুবক হইবে ?

17. দেখাও যে (a, b) এবং (c, d) বিন্দু দুইটি হইতে যে বিন্দুর দূরত্ব দুইটির অনুপাত কোন একটি ধ্রুবকের সমান, তাহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

উত্তরমালা

1. $x^2+y^2=4.$ 2. $x^2+y^2-8x-12y+43=0.$ 3. $x^2+y^2+4y=0.$
4. $25x^2+25y^2-70x+20y-47=0.$ 5. $x^2+y^2-2ax-2ay=0.$
6. $(-3,+4)$; 5. 7. $(1,-2)$; $\sqrt{5}$, 8. $(2,3)$; $\sqrt{2}$. 9. (i) একটি $(3,-2)$ বিন্দু ; (ii) কোন সঞ্চারপথ নাই। (iii) একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{37/18}$.
10. $x^2+y^2+2x-6y-6=0.$ 11. $x^2+y^2=221.$ 12. $x^2+y^2-2x-6y+5=0.$
13. $x^2+y^2-x-y=8$, একটি বৃত্ত। 14. $(x-h)^2+(y-k)^2=1.$
15. $x^2+y^2+2kx-2ky+2k^2-1=0.$
16. (i) এক প্রস্থ সমকেন্দ্রীয় বৃত্ত, যেখানে সাধারণ কেন্দ্রটি (h, k).
(ii) সম-ব্যাসার্ধের এক প্রস্থ বৃত্ত, যাহাদের কেন্দ্রগুলি y-অক্ষ হইতে h দূরত্বে অবস্থিত y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখার উপর অবস্থিত।
(iii) . (ii) এর অনুরূপ, কিন্তু কেন্দ্রগুলি এখানে x-অক্ষের সমান্তরাল ও x-অক্ষ হইতে h দূরত্বে অবস্থিত রেখার উপর থাকিবে।

6·4. উল্লিখিত (বা নির্দিষ্ট) শর্ত অনুসারে বৃত্ত (Circles under stated conditions)

এখানে ধরিয়া লওয়া হইল যে বৃত্তের মৌলিক ধর্মগুলির সহিত ছাত্রছাত্রারা ইতিপূর্বে পরিচিত হইয়াছে, **যেমন**, প্রাথমিক জ্যামিতিতে ইহা প্রমাণ করা হইয়াছে যে **সমরেখ নহে এইরূপ তিনটি বিন্দু দ্বারা একটিমাত্র বৃত্ত অনন্যভাবে (uniquely) নিরূপিত হয়।** বিশ্লেষণ-জ্যামিতিতে ইহা সহজেই পাওয়া যায়, কারণ—বৃত্তের সাধারণ সমীকরণটি (standard equation)কে নিম্নপ্রকারে লিখিতে পারা যায়,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

এখানে তিনটি ধ্রুবক আছে—g, f, c এবং ইহারাই বৃত্তটিকে নিরূপণ করে। এখন কোন বৃত্ত যদি তিনটি সমরেখ নহে এইরূপ বিন্দু দিয়া যায়, তবে ধ্রুবক তিনটি নির্ণয়ের জন্য তিনটি সহ-সমীকরণ গঠন করা যাইবে।

আরও সাধারণভাবে বলা যায় যে বৃত্তকে দিয়া **তিনটি উপযুক্ত শর্ত** পূরণ করান যায় এবং ইহা যদি বিশ্লেষণ-জ্যামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তবে ধ্রুবক তিনটি নির্ণয়ের জন্য তিনটি সহ-সমীকরণ পাওয়া যায়। কিন্তু এই বিষয়ে দৃষ্টি আকর্ষণ করা প্রয়োজন যে, **যে কোন তিনটি শর্ত** হইতেই একটি বৃত্ত **অনন্যভাবে** নিরূপিত **হয় না** (নীচে উদা. 9 দ্রষ্টব্য)।

উদা. 5. A : (1, 1), B : (2, −1), C : (2, 3) বিন্দু তিনটি সমরেখ নহে ; এই তিন বিন্দুগামী বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

পদ্ধতি 1. বৃত্তটির সমীকরণকে সাধারণ আকারে ধরা যাক্, যথা :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

যদি ইহাকে A, B, C দিয়া যাইতে হয়, তাহা হইলে স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে পর পর বসাইয়া নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণ তিনটি পাওয়া যাইবে :

$$2+2g+2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (i)$$

$$5+4g-2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (ii)$$

$$13+4g+6f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (iii)$$

(i) এবং (ii) **হইতে** (বিয়োগ দ্বারা) : $3+2g-4f=0 \cdots (iv)$

(i) এবং (iii) **হইতে** (বিয়োগ দ্বারা) : $11+2g+4f=0 \cdots (v)$

(iv) এবং (v) **হইতে**, $2g=-7$, $2f=-2$

সুতরাং (i) হইতে, $c=7$.

অতএব, বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-7x-2y+7=0.$$

এইরূপ ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিই সাধারণভাবে প্রয়োগ করা হয়। বৈচিত্র্য হিসাবে দ্বিতীয় একটি পদ্ধতি প্রদর্শিত হইল :

পদ্ধতি 2. পদ্ধতিটি এই তথ্য-নির্ভর যে সমরেখ নহে এমন তিন বিন্দু, A, B, C দিয়া যে বৃত্তটি যায় তাহার কেন্দ্র হইল $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু। $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণটি হইল

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

[লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী]

বা, $2x-4y=3.$

অনুরূপভাবে, $\overline{AC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2x+4y=11$$

সমাধান করিয়া, বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $(\frac{7}{2}, 1)$। ব্যাসার্ধ r হইল $(\frac{7}{2}, 1)$ হইতে প্রদত্ত বিন্দু দুইটির যে কোন একটির দূরত্ব, অর্থাৎ

$$r=\sqrt{(\tfrac{7}{2}-1)^2+(1-1)^2}=\tfrac{5}{2}$$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-\tfrac{7}{2})^2+(y-1)^2=(\tfrac{5}{2})^2$$

বা, $x^2+y^2-2y-7x+7=0.$

স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. বৃত্তটির সাধারণ সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

এ যদি দেখা যায় যে $c=0$, তবে বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী : (0, 0) উহাকে সিদ্ধ করে।

2. কিন্তু যদি $g=0$ হয়, তবে বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত, কারণ তখন সমীকরণ টিহইবে

$$x^2+(y+f)^2=f^2-c.$$

3. আবার, যদি $f=0$ হয়, তবে কেন্দ্রটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

উদা. 6. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি $(-4, 1)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দুগামী ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণের আকারটি হইবে

$$x^2+y^2+2fy+c=0$$

যেহেতু ইহা (− 4, 1) এবং (3, 0) বিন্দুগামী, সুতরাং

$$17+2f+c=0 \quad \text{এবং } 9+c=0\ ;$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়, $c=-9,\ 2f=-8$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-8y-9=0.$$

উদা. 7. যে বৃত্তের ব্যাস A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তাহার সমীকরণ হইল :

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

প্রথম পদ্ধতি : কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক হইল

$$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2},\ \beta=\frac{y_1+y_2}{2}$$

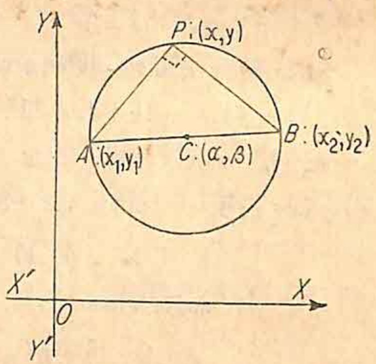
এবং ব্যাসার্ধ r

$$=\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ r=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$



চিত্র 6.3

বা, $\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$

বা, $\{(2x-x_1-x_2)^2-(x_1-x_2)^2\}+\{(2y-y_1-y_2)^2-(y_1-y_2)^2\}=0$

বা, $(2x-2x_1)(2x-2x_2)+(2y-2y_1)(2y-2y_2)=0$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে বৃত্তের নিম্নোক্ত ধর্মটির সাহায্য লওয়া হইবে : "বৃত্তের ব্যাস পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে।"

ধরা যাক, বৃত্তটির উপর **যে কোন একটি বিন্দু** P : (x, y)।

তাহা হইলে $\overline{AP}$র প্রবণতা হইল $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

এবং $\overline{BP}$র প্রবণতা হইল $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$,

কিন্তু $\overline{AP}$, $\overline{BP}$র উপর লম্ব,

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$$

অর্থাৎ, $(y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=0.$

যেহেতু বৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু (x, y) এর পক্ষে ইহা সত্য, সুতরাং ইহাই বৃত্তটির সমীকরণ।

উদা. 8. অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ (Intercepts on the axes)

(i) $(0, -1)$ এবং $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার x-অক্ষের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর।

পূর্বের উদাহরণ অনুসারে বৃত্তটির সমীকরণ (দুইটি পদ্ধতির যে কোন একটির সাহায্য লইয়া) হইল

$$(x-0)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$$

$$\text{বা, } x^2-2x+y^2-2y-3=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

[বৃত্তটির দ্বারা x-অক্ষ হইতে ছিন্ন দৈর্ঘ্য হইল উহার x-অক্ষের উপর **ছেদিতাংশ।**]

যে বিন্দু দুইটিতে বৃত্তটি x-অক্ষকে (যাহার সমীকরণ $y=0$) ছেদ করে, তাহাদের ভুজ পাওয়া যায়

$x^2-2x-3=0$ হইতে ; [(i)-এ $y=0$ বসাইয়া]

ইহা হইতে, $x=-1, 3$; সুতরাং বৃত্তটি x-অক্ষকে A_1 এবং A_2 বিন্দুতে ছেদ করিয়া থাকিলে, $A_1 : (-1, 0)$, $A_2 : (3, 0)$.

$$\therefore \quad \overline{A_1A_2}=\overline{OA}_2-\overline{OA}_1=3-(-1)=4\ ;$$

ইহাই x-অক্ষের উপর নির্ণেয় ছেদিতাংশ।

(ii) ধরা যাক্, x-অক্ষের উপর বৃত্ত

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

এর ছেদিতাংশ নির্ণয় করিতে হইবে।

বৃত্ত (ii) x-অক্ষকে $(y=0)$ যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় $ax^2+2gx+c=0$ হইতে ; [(ii)-এ $y=0$ বসাইয়া]

যদি x_1 এবং x_2 এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ হয়, তবে

$$x_1+x_2=-\frac{2g}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

সুতরাং, x-অক্ষের উপর নির্ণেয় ছেদিতাংশ

$$= |x_1 - x_2| = +\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

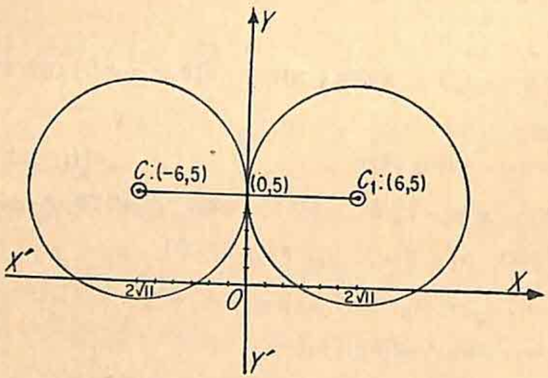
$$= +\sqrt{\frac{4g^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = +\frac{2}{a}\sqrt{g^2 - ac}.$$

টীকা : বৃত্ত x-অক্ষকে আদৌ ছেদ করিবে না, যদি x_1 এবং x_2 বীজদ্বয় কাল্পনিক হয় (অর্থাৎ, যদি নিরূপক $g^2 - ac$ ঋণাত্মক হয়)। যদি $g^2 = ac$ হয়, তবে বীজ দুইটি সমান এবং তখন বলা হয় যে x-অক্ষ বৃত্তটিকে $(x_1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

উদা. 9. যে বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে দিক্-নির্দেশিত $+5$ দূরত্বে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হইতে $2\sqrt{11}$ দৈর্ঘ্যের ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্তটির সমীকরণ ধরা যাক্

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \text{ (} g, f, c \text{ ধ্রুবক)}$$



চিত্র 6.4

বৃত্তটি যদি y-অক্ষের সহিত মিলিত হয় তবে যে বিন্দুতে বৃত্তটি উহার সহিত মিলিত হইবে তাহার কোটি পাওয়া যাইবে (সমীকরণটিতে $x=0$ বসাইয়া)

$$y^2+2fy+c=0 \text{ হইতে ;}$$

কিন্তু যেহেতু বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে, সুতরাং দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে ; এবং প্রত্যেকে 5 এর সমান হইবে, অর্থাৎ সমীকরণটি এখন হইবে

$$(y-5)^2=0$$

$$\therefore\ 2f=-10,\ c=25.$$

আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় (বৃত্তের সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া)

$$x^2+2gx+c=0 \text{ হইতে };$$

$$\text{বা, } x^2+2gx+25=0 \quad (\because c=25)$$

সমীকরণটির বীজ দুইটি যদি x_1 এবং x_2 হয়, তবে x-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ

$$= |x_1-x_2| = +\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$= +\sqrt{4g^2-100} = +2\sqrt{g^2-25}.$$

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$$2\sqrt{11} = +2\sqrt{g^2-25},$$

ইহা হইতে, $g=\pm 6.$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে এইরূপ দুইটি বৃত্ত আছে। উহারা হইল (চিত্র 6.4 দ্রষ্টব্য)

$$x^2+y^2+12x-10y+25=0$$

$$\text{এবং } x^2+y^2-12x-10y+25=0.$$

অনুশীলনী

1. $(-1, 3)$, $(3, 5)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র

$$x+2y=6$$

রেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $(0, a)$ এবং (b, h) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণগুলি নির্ণয় কর :

(i) $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$.

(ii) $(2, 0)$, $(-1, 3)$ এবং $(-2, 0)$.

(iii) $(0, 0)$, $(a, 0)$ এবং $(0, b)$.

(iv) $(5, 7)$, $(8, 1)$ এবং $(1, 3)$.

(v) (c, d), $(c, -d)$ এবং $(c+d, c-d)$.

4. যে বৃত্ত $(0, 0)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় হইতে 3 এবং 4 এর সমান ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে

$(2, 0)$, $(-1, 3)$, $(-2, 0)$, $(1, -1)$ বিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত ; উহার সমীকরণ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. যে বৃত্ত প্রত্যেক ধনাত্মক অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে 4 একক দূরত্বে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. যে সমুদয় বৃত্ত প্রত্যেক অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যাহাদের ব্যাসার্ধ a, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. $(-2, -3)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তগুলি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, -2)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দিয়া যায় যে বৃত্তগুলি, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে, যে বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (a, b) বিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ হইল

$$a(x^2+y^2)=x(a^2+b^2).$$

11. মূলবিন্দু হইতে 3 একক দূরে x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষকে 6 একক দূরত্বে ছেদ করে এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. A এবং B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, -3)$, $(6, 1)$; $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দু C এবং D, $\overline{AB}$ কে $3:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে ; C এবং D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এই বিন্দু দুইটি বিন্দু $(2, 4)$ এবং $(4, 3)$ এর সহিত সমবৃত্ত।

13. A, B, C, D হইল যথাক্রমে $(-2, -4)$, $(1, 5)$, $(6, 0)$, $(3, 1)$ বিন্দু ; দেখাও যে $\triangle$ABC এর পরি-ব্যাসার্ধ দৈর্ঘ্যে $\overline{AD}$ এবং $\overline{BC}$র মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমান।

14. একটি বিন্দু এইরূপভাবে গতিশীল আছে যে $(-3, 2)$ বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের বর্গ, $3x-4y+2=0$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের সহিত ভেদে থাকে ; দেখাও যে সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত এবং উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে $(3, 4)$ বিন্দুটি ঐ সঞ্চারপথের উপর আছে।

15. কেন্দ্র $4x-5y-5=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $(0, 1)$ ও $(4, 3)$ বিন্দুগামী এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. দেখাও যে নিম্নের বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকের কেন্দ্র অপর বৃত্তটির উপর অবস্থিত :

$$2x^2+2y^2-3x-4y+1=0\ ;\ 16x^2+16y^2-32x-1=0.$$

17. দেখাও যে

$x^2+y^2+2x-6y+9=0,\ 2x^2+2y^2+3x+y=0$ এই বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় হইল নিম্নোক্ত বৃত্ত

$4x^2+4y^2+7x-11y=0$ এর একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

উত্তরমালা

1. $x^2+y^2-4x-4y-2=0$.
2. $b(x^2+y^2-a^2)=x(b^2+h^2-a^2)$.
3. (i) $x^2+y^2+6x-2y-15=0$.
   (ii) $x^2+y^2-2y-4=0$.
   (iii) $x^2+y^2-ax-by=0$.
   (iv) $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$.
   (v) $d(x^2+y^2)-(c^2+d^2)x+(c-d)(c^2+d^2)=0$.
4. $x^2+y^2-3x-4y=0$.
5. $x^2+y^2-2y-4=0$; $(0, 1)$.
6. $x^2+y^2-8x-8y+16=0$.
7. $x^2+y^2\pm 2ax\pm 2ay+a^2=0$.
8. $x^2+y^2+2(5\pm\sqrt{12})(x+y)+37\pm 10\sqrt{12}=0$.
9. $x^2+y^2-6x+4y+9=0$, বা, $x^2+y^2+10x+20y+25=0$.
11. $x^2+y^2\pm 6\sqrt{2}y-6x+9=0$.
14. $x^2+y^2+30x-36y+29=0$.
15. $x^2+y^2-5x-2y+1=0$.

6·5. বৃত্তের স্পর্শকের প্রাথমিক ধারণাসংক্রান্ত আনুষঙ্গিক প্রশ্নসমূহ (Associated Problems connected with the elementary notions of tangent to a Circle)

পরবর্তী একটি অধ্যায়ে, বক্ররেখার উপরিস্থিত কোন বিশেষ বিন্দুতে স্পর্শক, এই শব্দটির যথারীতি সংজ্ঞা দেওয়া হইবে। এই অনুচ্ছেদে কিন্তু ধরিয়া লওয়া হইবে যে, **বৃত্তের একটি বিন্দুতে স্পর্শক**, এই শব্দটি সম্পর্কে ছাত্রছাত্রীদের কিছু মৌলিক ধারণা আছে। বিশেষ করিয়া, নিম্নলিখিত উক্তি দুইটি তাহাদের জানা আছে বলিয়া মনে করা হইবে :

1. কোন সমতলে একটি সরলরেখা ও একটি বৃত্ত প্রদত্ত হইলে, তিনটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হইতে পারে :

(i) রেখাটি বৃত্তটিকে দুইটি পৃথক বিন্দুতে, ধরা যাক A এবং B তে, ছেদ করিতে পারে (চিত্র 6.5)।

(ii) রেখাটি বৃত্তটিকে আদৌ ছেদ না করিতে পারে, অর্থাৎ ঐ রেখা ও বৃত্তের কোন সাধারণ বিন্দু নাই।

(*iii*) বৃত্তের **একটি এবং কেবলমাত্র ঐ একটি বিন্দু** Pতে রেখাটির দুইটি ছেদ-বিন্দু সমাপতিত হয়।

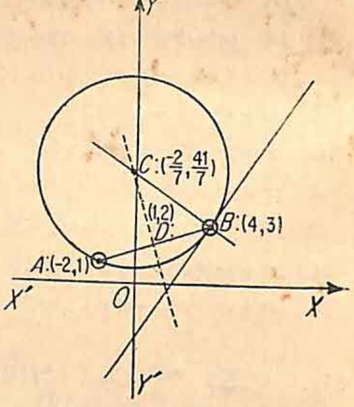
শেষের ক্ষেত্রে বলা হয় যে রেখাটি বৃত্তটির P বিন্দুতে **স্পর্শক (tangent)** (অথবা, রেখাটি বৃত্তটকে P তে **স্পর্শ করিয়াছে**)। বিন্দু P **স্পর্শবিন্দু (Point of contact)** বলিয়া পরিচিত।

2. যদি PT রেখা বৃত্তটির Pতে স্পর্শক হয়, তবে ব্যাসার্ধ $\overline{OP}$, PT স্পর্শকের উপর লম্ব।

উদা. 10. $(-2, 1)$ বিন্দুগামী যে বৃত্ত $3x-2y-6=0$ রেখার $(4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

স্পষ্টত বৃত্তটি A $(-2, 1)$ এবং B $(4, 3)$ বিন্দু দিয়া যায়। সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্র C (চিত্র 6.5) $\overline{AB}$ রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

আবার C, B গামী ব্যাসার্ধের উপরও অবস্থিত, যেখানে $\overline{CB}$, B বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব।



চিত্র 6.5

$\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করিলে পাওয়া যাইবে

$$3x+y-5=0 \quad \cdots \quad \cdots (i)$$

[$\overline{AB}$র প্রবণতা $=1/3$; $\overleftrightarrow{CD}$র প্রবণতা $=-3$; একটি বিন্দু, অর্থাৎ $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দু, হইল D : $(1, 2)$]

$\overleftrightarrow{BC}$ রেখার (যাহা স্পর্শক রেখার উপর লম্ব) সমীকরণ হইল

$$y-3=-\tfrac{2}{3}(x-4)$$

বা, $3y+2x=17 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(*i*) ও (*ii*) সমাধান করিয়া পাওয়া যায়, C এর স্থানাঙ্ক : $(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7})$.

তাহা হইলে ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(4+\frac{2}{7})^2+(3-\frac{41}{7})^2}=\frac{10}{7}\sqrt{13}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$(x+\tfrac{2}{7})^2+(y-\tfrac{41}{7})^2=(\tfrac{10}{7}\sqrt{13})^2$$

বা, $\mathbf{7x^2+7y^2+4x-82y+55=0.}$

উদা. 11. (a) বৃত্ত $x^2+y^2=25$ এবং রেখা $x+2y-5=0$ এর ছেদের ফলে উৎপন্ন জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) রেখা $3x+4y+7=0$ বৃত্ত $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ কে কোথায় ছেদ করে, নির্ণয় কর।

সমাধান। (a) $x+2y-5=0$ রেখা এবং $x^2+y^2=25$ বৃত্তের ছেদ বিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে

$x^2+\left(\frac{5-x}{2}\right)^2=25$ হইতে; (সমীকরণ দুইটির মধ্যে y অপনয়ন দ্বারা)

বা, $x^2-2x-15=0$, অর্থাৎ $x=5$; বা -3.

যখন $x=5$, $y=(5-x)/2$; বা $y=0$

যখন $x=-3$, $y=(5-x)/2$; বা $y=4$

$\therefore$ রেখাটি বৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইল

$(5, 0)$ এবং $(-3, 4)$

$\therefore$ জ্যাটির দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5+3)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{5}$ একক।

(b) $3x+4y+7=0$ হইতে পাওয়া যায় $x=(-4y-7)/3$

x এর এই মান $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ সমীকরণে বসাইলে,

$$\frac{(4y+7)^2}{9}+y^2+\frac{4(4y+7)}{3}-6y-12=0$$

বা, $y^2+2y+1=0$

বা, $(y+1)^2=0$,

অর্থাৎ $y=-1, -1$ এবং ফলে $x=-1, -1$, অর্থাৎ,

রেখাটি বৃত্তটির সহিত যে বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে তাহারা সমাপতিত এবং বিন্দুটি হইল $(-1, -1)$। প্রকারান্তরে বলা যায়, রেখাটি বৃত্তটিকে $(-1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

বিবিধ প্রশ্নমালা

(অধ্যায় 6 এর উপর)

[A]

1. $x^2+y^2=64$ বৃত্ত $3x+4y-c=9$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. 6 একক দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড এইরূপে গতিশীল আছে যে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় সর্বদা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে উহার মধ্য বিন্দু একটি বৃত্ত রচনা করে এবং বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $(3, 4), (3, -6), (-1, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধও নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে $y=x+a\sqrt{2}$ রেখা বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ কে $(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \frac{1}{2}a\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

5. B : (3, 0) এবং C : (−3, 0) দুইটি বিন্দু। যদি A এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে $\widehat{BAC}=90^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজ ABCর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে, যাহার সমীকরণ $x^2+y^2=1$.

6. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ও y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে যথাক্রমে 6 এবং 8 দৈর্ঘ্যের ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. প্রমাণ কর যে বৃত্তত্রয়

$x^2+y^2-2x+6y=-1$, $x^2+y^2+4x-12y=9$, $x^2+y^2=16$

এর কেন্দ্রগুলি সম-রেখ। এই সরলরেখাটির সমীকরণ কি হইবে ?

8. যে বৃত্ত (0, 4) বিন্দু দিয়া গমন করে এবং x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে $3x+4y+7=0$ রেখা $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে $(-1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

10. সঞ্চারপথ দুইটি অঙ্কন কর, যদি উহাদের সমীকরণ হয়

(*i*) $x^2+y^2-6x+8y=0$; (*ii*) $(x-3)(y+4)=0$.

11. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=6$, এবং $x^2+y^2-12x+4y=9$ এই বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধগুলি A. P. তে আছে।

12. $(0, -1)$ এবং $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ বৃত্ত x-অক্ষ হইতে যে ছেদিতাংশ ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[B]

1. কোন ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় B এবং C হইল যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$। উহার শীর্ষ A এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যখন

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2k^2 \quad (k=\text{ধ্রুবক},\ k^2>a^2).$$

2. $x^2+y^2+2x+2y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায় যে বৃত্ত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহার কেন্দ্র (2, 3) বিন্দু হয়।

3. যে বৃত্ত বা বৃত্তসমূহ x-অক্ষকে প্রথম পাদতে মূলবিন্দু হইতে 5 একক দূরে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হইতে $2\frac{1}{2}$ একক দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে, তাহার বা তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x-4y+7=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং উহা x-অক্ষকে $x=2$ এবং $x=6$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-2x+4y=0$ এবং $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

6. (3, 7) এবং (9, 1) এর সংযোজক রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে $x+y=4$ রেখাটি বৃত্তটিকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

7. যদি দুইটি বৃত্ত $x^2+y^2+2ax+c=0$, $x^2+y^2+2by+c=0$ পরস্পরকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$$

8. প্রদত্ত একটি বৃত্ত যাহার সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

কিরূপে নির্ণয় করিবে যে কোন প্রদত্ত বিন্দু $P_1(x_1, y_1)$

(i) বৃত্তটির বাহিরে ;

(ii) বৃত্তটির ভিতরে ;

(iii) বৃত্তটির উপরে

অবস্থিত কি না ?

9. প্রমাণ কর যে n সংখ্যক নির্দিষ্ট বিন্দু যথা $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ হইতে P বিন্দুর দূরত্বগুলির বর্গের সমষ্টি যদি ধ্রুবক k হয়, তবে P এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

10. প্রমাণ কর যে সমীকরণ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2+y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2+y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, যাহা সমরেখ নহে এমন তিনটি বিন্দু $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ দিয়া যায়।

[C]

1. যে বৃত্তের $3x+4y-16=0$ রেখা স্পর্শক এবং $(-4, 2)$ বিন্দু কেন্দ্র তাহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

2. প্রমাণ কর যে $(0, a)$ এবং (b, a) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, তাহার সমকোণের শীর্ষের সঞ্চার-পথের সমীকরণ

$$x^2+y^2-bx-2ay+a^2=0.$$

3. (*i*) বৃত্ত

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

এর বহিঃস্থ বিন্দু P_1 : (x_1, y_1) হইতে অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : যদি C কেন্দ্র হয় এবং T স্পর্শ-বিন্দু, হবে ΔCTP_1 একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার $\angle CTP_1=90°$.

$$\therefore\ P_1T^2=\overline{CP}_1{}^2-CT^2.\ ]$$

(*ii*) অনুরূপ প্রশ্ন : যেখানে বৃত্তটি ধর $x^2+y^2-4x-2y-15=0$ এবং বহিঃস্থ বিন্দু (8, 4).

4. A : (1, 2) এবং B : (3, 4) বিন্দুগামী বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি $3x+y-3=0$ রেখা উহাদের স্পর্শক হয়।

5. 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্তসমূহ $3x+4y-16=0$ রেখার (4, 1) বিন্দুতে স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নিরূপণ কর।

[ইঙ্গিত : সমাধান কর : $\dfrac{3h+4k-16}{5}=\pm 5$ এবং $(h-4)^2+(k-1)^2=5^2$, যেখানে (h, k) কেন্দ্র। দুইটি বৃত্ত সম্ভব।]

6. (2,3) বিন্দুগামী বৃত্ত দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহাদের $3x-4y+1=0$ এবং $4x+3y-7=0$ রেখাদ্বয় স্পর্শক।

7. যে বৃত্তের $x+y+4=0$ এবং $7x-y+4=0$ রেখাদ্বয় স্পর্শক এবং যাহার কেন্দ্র $4x+3y=2$ রেখার উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয় যে বৃত্তের $3x-4y+7=0$ রেখা স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. যে বিন্দুর $(-2, -5)$ হইতে দূরত্বের বর্গ বিন্দুটির $8x+15y-34=0$ রেখা হইতে দূরত্বের তিনগুণ, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণটি লিখ।

10. পরস্পর লম্ব রেখাদ্বয় $ax+by+c=0$ এবং $bx-ay+c'=0$ হইতে যে বিন্দুর দূরত্ব দুইটির বর্গের সমষ্টি কোন ধ্রুবক k^2 এর সমান, দেখাও যে উহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

[D]

1. x-অক্ষের উপর $(1, 0)$ এবং $(2, 0)$ বিন্দু লওয়া হইল। এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ এমনভাবে অঙ্কিত হইল যেন উহার শীর্ষ ধনাত্মক পাদতে অবস্থিত হয়। ইহার বাহুগুলিকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. কোন বৃত্তে (a, b) এবং $(b, -a)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ উহার জ্যা, এবং জ্যাটি বৃত্তটির পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে 45° কোণ উৎপন্ন করে; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(1, -3)$ বিন্দু এবং $2x-y-4=0$ রেখা যাহার স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x-7y+25=0$ রেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে যে বিন্দুগুলিতে ছেদ করে তাহাদের নির্ণয় কর।

5. $4x-3y-5=0$ রেখা হইতে $x^2+y^2+3x-y-10=0$ বৃত্ত যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য কত?

6. দেখাও যে $9x^2+9y^2-18x+6y-170=0$ বৃত্তের কেন্দ্রে $x-3y+8=0$ সরলরেখা বৃত্তটি হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে, তাহা একটি সমকোণ উৎপন্ন করে।

7. দেখাও যে P : $(1, 1)$ বৃত্ত

$$x^2+y^2+4x+6y-12=0$$

এর উপর অবস্থিত; P গামী ব্যাসটির অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে $(-9, 3)$, $(3, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা বৃত্ত $x^2+y^2-12x-6y=0$ দ্বারা $3:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয়।

9. বৃত্ত $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ x-অক্ষকে A, B এবং y-অক্ষকে C, D তে ছেদ করে; O কেন্দ্র হইলে বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে

$$\overline{OA}.\overline{OB}=\overline{OC}.\overline{OD}=6.$$

10. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি মূলবিন্দু এবং (a, b) বিন্দু দিয়া গমন করে; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. $2x-3y+21=0$, $3x-2y-6=0$ এবং $2x+3y+9=0$ রেখাগুলির দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $x-y+2=0$, $2x+3y-1=0$ এবং $4x-y-17=0$ রেখাত্রয়ের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

[A]

1. $\frac{3}{5}\sqrt{1600-c^2}$. 2. $x^2+y^2=9$. 3. $x^2+y^2-6x+2y=15$; $(3, 1)$; 5.

6. $x^2+y^2-6x-8y=0$. 7. $y+3x=0$ হইল কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা।

8. $x^2+y^2-4x-5y+4=0$. 12. $x^2+y^2-2x-2y-3=0$; ছেদিতাংশ $=4$.

[B]

1. $x^2+y^2=k^2-a^2$. 2. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

3. $x^2+y^2-10x\pm 26y+25=0$. 4. $2x^2+2y^2-16x-11y+24=0$

6. $x^2+y^2-8y-12x+34=0$. 7. (*i*) $\overline{CP_1}>\sqrt{g^2+f^2-c}$; (*ii*) $\overline{CP_1}<\sqrt{g^2+f^2-c}$

(*iii*) $\overline{CP_1}=\sqrt{g^2+f^2-c}$, যেখানে C বৃত্তটির কেন্দ্র।

[C]

1. $x^2+y^2+8x-4y+4=0$ 3. (*i*) $\{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\}^{1/2}$; (*ii*) 5.

4. $x^2+y^2-8x-2y+7=0$; $x^2+y^2-3x-7y+12=0$.

5. $x^2+y^2-14x-10y+49=0$; $x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

6. $(x-2)^2+(y-8)^2=25$; $(x-\frac{6}{5})^2+(y-\frac{12}{5})^2=1$.

7. $(x-2)^2+(y+2)^2=8$; $(x+4)^2+(y-6)^2=18$. 8. $x^2+y^2-4x+6y=12$.

9. $17(x^2+y^2)+44x+125y+595=0$; $17(x^2+y^2)+92x+215y+391=0$.

[D]

1. $x^2+y^2-3x+2=0$; $2(x^2+y^2)-5x-\sqrt{3}y+3=0$; $2(x^2+y^2)-7x-\sqrt{3}y+6=0$.

2. $x^2+y^2=a^2+b^2$: $x^2+y^2-2(a+b)x+2(a-b)y+a^2+b^2=0$.

3. $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$. 4. $(3, 4)$, $(-4, 3)$. 5. 5.

7. $(-5, -7)$. 10. $b(x^2+y^2)-(a^2+b^2)y=0$. 11. $x^2+y^2+2x-4y=8$.

12. $5(x^2+y^2)-32x-8y-34=0$

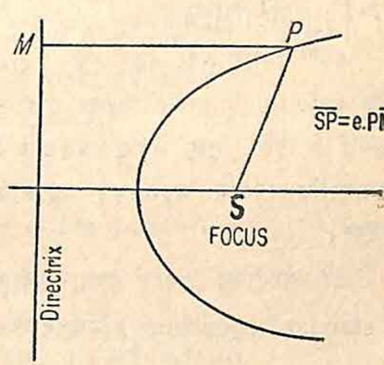
7

কনিক্ সেকসন্স বা কনিক্ (CONIC SECTIONS) : আদর্শ সমীকরণ (STANDARD EQUATIONS)

7·1. সূচনা : কনিক্ সেক্‌সন্স্‌-এর ধারণা

কনিক্ সেক্‌সন্স্‌-এর সংজ্ঞা দিয়া সূচনা করা হইল :

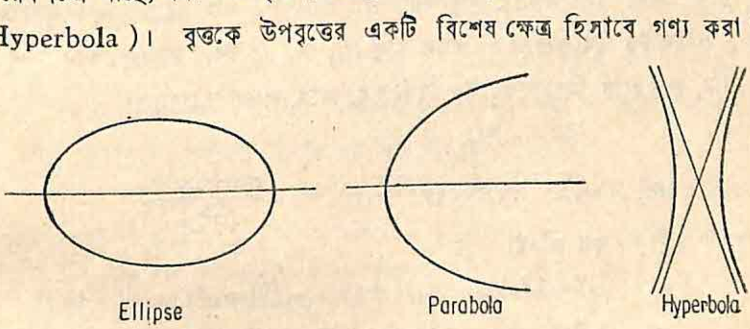
কোন সমতলে একটি বিন্দু যদি এইরূপভাবে সঞ্চার করে যে ঐ সমতলস্থ একটি স্থির বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব, ঐ সমতলস্থ একটি স্থির সরলরেখা হইতে উহার দূরত্বের সহিত ধ্রুবক অনুপাতে থাকে তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে একটি **কনিক্ সেক্‌সন্** বা কেবলমাত্র **কনিক্ (Conic)** বলা হয়।



চিত্র 7.1

স্থির বিন্দুটিকে কনিক্‌টির **নাভি** (focus), স্থির সরলরেখাটিকে উহার **নিয়ামক (directrix)** এবং ধ্রুবক অনুপাতটিকে উহার **উৎকেন্দ্রতা (eccentricity)** e বলা হয়। (চিত্র 7.1)

প্রকৃত কনিক্‌স্ (proper conics) শিরোনামার অধীন তিনটি বক্ররেখা বা বক্ররেখ চিত্র আছে, যথা : উপবৃত্ত (Ellipse), অধিবৃত্ত (Parabola) এবং পরাবৃত্ত (Hyperbola)। বৃত্তকে উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র হিসাবে গণ্য করা হয়।



চিত্র 7.2(a) চিত্র 7.2(b) চিত্র 7.2(c)

ছাত্রছাত্রীরা চিত্র 7.2 হইতে এই বক্ররেখাগুলির আকৃতি সম্পর্কে একটি ধারণা করিতে পারিবে।

অধিকন্তু, একটি সরলরেখা-যুগল (a pair of straight lines) কে একটি **অপ্রকৃত কনিক্ (improper conic)** বা **অপজাত কনিক্ (a degenerate conic)** রূপে বিবেচনা করা হয়। বর্তমান অধ্যায়ে **কেবল প্রকৃত কনিক্‌স্ সম্পর্কে** আলোচনা করা হইবে।

কোন কনিক্ সেক্‌সন্ একটি অধিবৃত্ত, একটি উপবৃত্ত অথবা একটি পরাবৃত্ত হইবে যদি উৎকেন্দ্রতা e যথাক্রমে এক (unity) এর সমান, এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা এক অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। দুইটি দূরত্বের অনুপাত হওয়ায় কনিকের উৎকেন্দ্রতা মূলত ধনাত্মক। বৃত্তের উৎকেন্দ্রতা **শূন্য** বলিয়া **স্বীকার করিয়া লওয়া হইল।** সুতরাং $e=0$: একটি বৃত্ত ; $e=1$: একটি অধিবৃত্ত ; $0<e<1$: একটি উপবৃত্ত ; $e>1$: একটি পরাবৃত্ত।

একটি সমতল এবং একটি শঙ্কুর (cone) [সুবিধার্থে একটি লম্ব বৃত্তাকার দ্বিগুণ-শঙ্কু (double cone) লওয়া যাইতে পারে] ছেদ (section) একটি অধিবৃত্ত, একটি উপবৃত্ত (বৃত্ত ইহার অন্তর্ভুক্ত) অথবা একটি পরাবৃত্ত হইতে পারে ছেদী সমতলটির অবস্থান অনুসারে। প্রত্যেক ক্ষেত্র বিবেচনার সময় উপযুক্ত চিত্র প্রদত্ত হইবে।

এই অধ্যায়ের প্রধান লক্ষ্য, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (standard equations) নিরূপণ করা।

7·2. কনিক্‌কে দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় (A conic can be represented by an equation of second degree)

এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ লওয়া হইল। এই অক্ষ সম্পর্কে নাভি S এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং নিয়ামকটির সমীকরণ $ax+by+c=0$ ধরা হইল। আরও ধরা হইল e কনিকটির উৎকেন্দ্রতা। এখন যদি P : (x, y) কনিকের যে কোন বিন্দু হয় এবং $\overline{PM}$, P হইতে নিয়ামকের লম্ব-দৈর্ঘ্য হয়, তবে, সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}$$

বা, $$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e.\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

∴ বর্গ করিয়া,

$$(a^2+b^2)\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}=e^2(ax+by+c)^2$$

বা, $$\{a^2(1-e^2)+b^2\}x^2+\{a^2+b^2(1-e^2)\}y^2-2e^2abxy$$
$$-2x[(a^2+b^2)x_1+ace^2]-2y[(a^2+b^2)y_1+bce^2]$$
$$+(x_1{}^2+y_1{}^2)(a^2+b^2)-e^2c^2=0,$$

এবং ইহা দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ, যথা :

$$Ax^2+By^2+2Hxy+2Gx+2Fy+C=0$$

এর আকারে আছে।

টীকা। (*i*) উপযুক্ত অক্ষ-যুগল নির্বাচন দ্বারা এবং মূলবিন্দুর উপযুক্ত মনোনয়ন দ্বারা প্রাপ্ত আকারটিকে সরলতর আকারের সমীকরণে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

(*ii*) এই অনুচ্ছেদের প্রতিপাদ্যটির বিপরীত প্রতিপাদ্য প্রমাণের জন্য অক্ষ-দ্বয়ের পরিবর্তন সম্পর্কে ধারণা থাকার প্রয়োজন ; পাঠ্যসূচীর অন্তর্গত নহে বলিয়া উহা পরিহার করা হইল। (Appendix I দ্রষ্টব্য)।

উদা. 1. কোন কনিকের নাভি $(2,-1)$ বিন্দু এবং উহার নিয়ামকের সমীকরণ $3x-4y+1=0$; যদি $e=\frac{1}{2}.\sqrt{2}$ হয়, তবে কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপরে প্রদত্ত প্রণালীতে অগ্রসর হইলে, কনিকটির সমীকরণ হইবে

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\tfrac{1}{2}\left(\frac{3x-4y+1}{5}\right)^2,$$

এবং সরল করিয়া পাওয়া যাইবে,

$$41x^2+34y^2+24xy-206x+108y+249=0.$$

অনুশীলনী

1. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

(*i*) নাভি $(3,-4)$ এবং নিয়ামক $6x-7y+5=0$.

(*ii*) নাভি $(1,-1)$ এবং নিয়ামক $x-y=0$.

(*iii*) নাভি (a, b) এবং নিয়ামক $x/a+y/b=1$

2. উপবৃত্তের নাভি, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রতা নিম্নে প্রদত্ত হইল ; উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(*i*) নাভি : $(1, 2)$; নিয়ামক : $x+y+1=0$, এবং $e=\frac{1}{2}$.

(*ii*) নাভি : $(-1, 0)$; নিয়ামক : $x+3=0$, এবং $e=\frac{1}{2}$.

3. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহার

(*i*) নাভি হয় $(1, 2)$, নিয়ামক : $3x-4y+1=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=5/2$.

(*ii*) নাভি হয় $(1, 1)$, নিয়ামক : $x+2y=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=4$.

[উঃ 1. (*i*) $(7x+6y)^2-570x+750y+2100=0$;

(*ii*) $x^2+2xy+y^2-4x+4y+4=0$;

(*iii*) $(ax-by)^2-2a^3x-2b^3y+a^4+a^2b^2+b^4=0$.

2. (*i*) $7x^2-2xy+7y^2-18x-34y+39=0$; (*ii*) $3x^2+4y^2+4x=0$

3. (*i*) $5x^2-24xy+12y^2+14x+8y-19=0$;

(*ii*) $11x^2+64xy+59y^2+10x+10y-10=0$

7·3. অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard Equation of a Parabola)

1. সংজ্ঞা। কোন বিন্দু P যদি এইরূপে বিচরণ করে যে একটি স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির সরলরেখা L হইতে উহার লম্ব-দূরত্বের সহিত সর্বদা সমান থাকে, তবে P এর সঞ্চারপথকে অধিবৃত্ত বলা হয়।

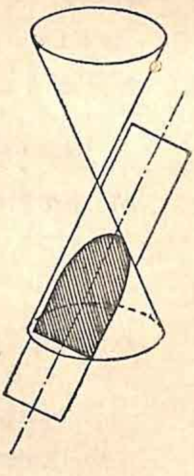
ইহা পরিষ্কার ধারণা করিতে হইবে যে

(i) P বিন্দু, L রেখা এবং S বিন্দুর ধারক সমতলে অবস্থিত

এবং (ii) S, রেখা L এর উপর অবস্থিত বিন্দু নহে।

স্থির বিন্দু S কে অধিবৃত্তটির **নাভি** এবং স্থির রেখা L কে উহার **নিয়ামক** বলা হয়।

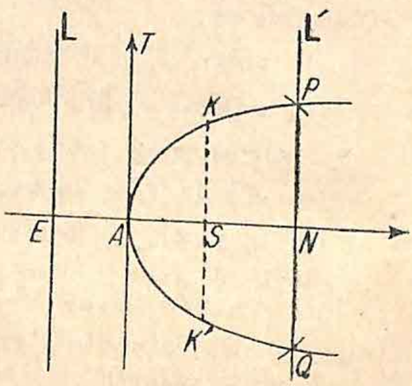
2. অধিবৃত্ত হইল একটি কনিক সেক্‌সন্ (a conic section), অর্থাৎ ইহাকে পাওয়া যায়, যদি কোন লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুকে শঙ্কু-উৎপাদনকারী রেখার (generator of the cone) সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা ছেদ করা হয়—চিত্র 7.3 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 7.3

3. বিন্দু S এবং একটি রেখা L প্রদত্ত আছে। যে অধিবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক L, তাহার উপরস্থিত যতগুলি ইচ্ছা বিন্দু রুলার ও কম্পাস্ (ruler and compass) এর সাহায্যে নির্ণয় করিতে হইবে।

একটি বিন্দু হইল, S হইতে নিয়ামক L এর উপর অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্য $\overline{SE}$'র মধ্যবিন্দু A. যদি L এর সমান্তরাল $\overleftrightarrow{AT}$ অঙ্কিত হয়, তবে $\overleftrightarrow{AT}$'র উপরিস্থিত অপর কোন বিন্দু, অথবা, $\overleftrightarrow{AT}$'র বাম-পার্শ্বে অবস্থিত অন্য কোন বিন্দু অধিবৃত্তস্থ বিন্দু হইতে পারে না; কারণ, এইরূপ সমুদয় বিন্দু S বিন্দু অপেক্ষা L রেখার অধিকতর নিকটে অবস্থিত (চিত্র 7.4)।



চিত্র 7.4

$\overleftrightarrow{AT}$ রেখার দক্ষিণ পার্শ্বে L এর সমান্তরাল যে কোন রেখা L' অঙ্কন করা হইল, উহা $\overrightarrow{AS}$ কে কোন বিন্দু N এ ছেদ করিল (ধরা যাক)। Sকে কেন্দ্র করিয়া এবং

$\overline{EN}$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল, যাহা L' কে P এবং Q (ধরা যাক্) বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে P এবং Q উভয়েই অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত (যৌক্তিকতা বিচার কর)। এইভাবে অধিবৃত্তটির উপর যতগুলি ইচ্ছা যুগ্ম-বিন্দু (P, Q) প্রাপ্ত হওয়া যাইবে। তখন এই বিন্দুসমূহের মধ্য দিয়া একটি অপ্রতিহত মসৃণ বক্র রেখা অঙ্কন করা যাইবে।

সতর্কতার সহিত লক্ষ্য করিতে হইবে যে $\overleftrightarrow{AT}$ রেখা অধিবৃত্তটির একটি মাত্র সমাপতিত বিন্দু Aতে ছেদ করিয়াছে; অন্য কথায় $\overleftrightarrow{AT}$ হইল অধিবৃত্তটির A বিন্দুতে স্পর্শক।

সংজ্ঞা: বিন্দু A ($\overline{SE}$র মধ্য-বিন্দু) কে অধিবৃত্তটির **শীর্ষ** (vertex) এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{AS}$ কে **অধিবৃত্তটির অক্ষ** (axis of the parabola) বলা হয়। অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে অক্ষটির উপর যদি $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন করা হয়, তবে $\overline{PN}$ কে P বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বলা হয়।

মনে করা যাক্, $\overline{PN}$ বর্ধিত হইয়া বক্ররেখাটিকে Q তে ছেদ করিল; তাহা হইলে $\overline{PNQ}$ কে P এর **দ্বিগুণ-কোটি** (double ordinate) বলা হয়; $\overline{AN}$ কে বলা হয় P বিন্দুর **ভুজ** (abscissa)।

নাভি S গামী দ্বিগুণ-কোটি $\overline{KK'}$ কে অধিবৃত্তটির **নাভি-লম্ব (latus rectum)** বলা হয়; সুতরাং নাভি-লম্ব হইল অক্ষের উপর লম্ব একটি নাভি-গামী জ্যা (focal chord)।

অনুশীলনী। বর্গাঙ্কিত একখণ্ড ছক কাগজ লইয়া উহার এক প্রান্তের নিকটবর্তী একটি উল্লম্ব রেখা বরাবর L রেখা চিহ্নিত কর। L রেখা হইতে 1 সে. মি. দূরবর্তী একটি বিন্দু S কে মনোনীত কর। এখন উল্লম্ব রেখাগুলির উপর অথবা উহাদের যতগুলি ইচ্ছা ততগুলির উপর (compass) এর সাহায্যে সঞ্চারপথটির বিন্দুগুলিকে ত্বরিতগতিতে চিহ্নিত করা যায়। একটি সুস্পষ্ট ও পরিষ্কার চিত্র অঙ্কন কর। নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ্য কত?

4. অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক্, অধিবৃত্তটির নাভি S এবং নিয়ামক L (চিত্র 7.5) L এর উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক, $\overline{SE}$'র মধ্য-বিন্দু A; তাহা হইলে A হইল শীর্ষবিন্দু এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{SE}$ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষ। ধরা যাক, শীর্ষ A দিয়া অক্ষের উপর লম্ব $\overleftrightarrow{AY}$ অঙ্কন করা হইল।

A কে মূলবিন্দু, অক্ষ $\overleftrightarrow{AS}$ কে x-অক্ষ এবং লম্ব-রেখা $\overleftrightarrow{AY}$ কে y-অক্ষ মনোনীত করা হইল। ধরা হইল $\overline{AS}=a$ $(a>0)$। তাহা হইলে,

(i) শীর্ষ Aর স্থানাঙ্কদ্বয় $=(0, 0)$;

(ii) নাভি Sর স্থানাঙ্কদ্বয় $=(a, 0)$;

(iii) অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ : $y=0$;

(iv) শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ : $x=0$;

(v) নিয়ামক L এর সমীকরণ : $x=-a$.

ধরা যাক্, P : (x, y) অধিবৃত্তস্থ যে কোন একটি বিন্দু। তাহা হইলে অধিবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$|\overline{SP}| = |\overline{PM}|$$

যেখানে $\overline{PM}$ হইল P হইতে নিয়ামক L এর লম্ব-দূরত্ব।

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=a+x$$

$$[\because |\overline{MP}| = |\overline{EA}| + |\overline{AN}| \text{ ; (চিত্র 7.5 দ্রষ্টব্য) }]$$

ইহা হইতে সরল করিয়া পাওয়া যায়, $(x-a)^2+y^2=(a+x)^2$

বা, $y^2=4ax$.

অধিবৃত্তটির প্রত্যেক বিন্দু P (এবং অন্য কোন বিন্দু নহে) $y^2=4ax$ এই সম্পর্ক বজায় রাখে, সুতরাং ইহাই অধিবৃত্তটির সমীকরণ।

জ্যামিতির ভাষায় $y^2=4ax$ কে এইভাবে ব্যাখ্যা করা যায়, যথা,

$$\overline{PN}^2=4\,\overline{AS}.\,\overline{AN}.$$

উদা. 2. যে অধিবৃত্তের নাভি $(3, 0)$ এবং নিয়ামক : $x=-3$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ইহা স্পষ্ট যে এখানে $a=-3$; সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$y^2=12x$$

5. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের আকৃতি (shape)

প্রতিসাম্যের ধারণা (Notion of Symmetry) : একটি রেখা সম্পর্কে প্রতিসাম্য।

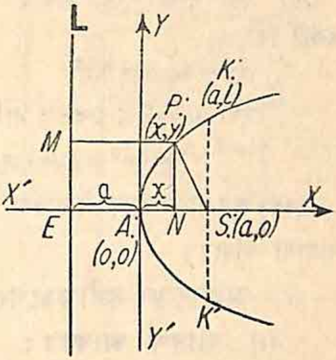
কোন রেখা L সম্পর্কে দুইটি বিন্দু P_1 এবং P_2 কে প্রতিসম বলা হয়, যদি রেখাটি $\overline{P_1P_2}$ রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক হয় ; রেখা L কে প্রতিসাম্য-রেখা (line of symmetry) বলা হয়। P_2 কে বলা হয় P_1 এর **প্রতিফলন বিন্দু**

(reflection) বা **প্রতিবিম্ব** (image) এবং অপরপক্ষে P_1 হইল P_2 এর **প্রতিফলন** বিন্দু বা প্রতিবিম্ব।

কোন সমতলে অবস্থিত একটি বক্ররেখ চিত্রকে কোন রেখা L সম্পর্কে প্রতিসম বলা হয়, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু P_1 এর L সম্পর্কে প্রতিবিম্ব বিন্দু P_2 ও ঐ বক্ররেখার উপর অবস্থিত হয়। ইহা হইতে পাওয়া যায় যে

বিন্দুদ্বয় (x, y) এবং $(x, -y)$ x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম ;

বিন্দুদ্বয় (x, y) এবং $(-x, y)$ y-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।



চিত্র 7.5

একটি বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসাম্য

কোন বিন্দু C সম্পর্কে P_1 এবং P_2 বিন্দু দুইটিকে **প্রতিসম** বলা হয়, যদি C রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু হয়।

সমতলস্থ কোন বক্ররেখাকে কোন বিন্দু C সম্পর্কে বলা হয় **প্রতিসম**, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু P_1 এর জন্য বক্ররেখাটির অপর একটি এমন বিন্দু P_2 বিদ্যমান থাকে, যেন $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু C হয়।

ইহা হইতে বলা যায় যে কোন বক্ররেখা মূলবিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হইবে, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু $P_1(x, y)$ এর জন্য বক্ররেখাটির উপর অপর একটি বিন্দু $P_2(-x, -y)$ বিদ্যমান থাকে। এক্ষেত্রে মূলবিন্দু বক্ররেখাটির জ্যা $\overline{P_1P_2}$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এই পরিপ্রেক্ষিতে বক্ররেখা $y^2=4ax(a>0)$ এর আকৃতি সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে :

(*i*) যদি (x, y) বিন্দু বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত হয়, তবে $(x, -y)$ বিন্দুও উহার উপর অবস্থিত ; সুতরাং বক্ররেখাটি x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম। অন্য কথায়, **অধিবৃত্ত উহার অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।**

(*ii*) যদি $x<0$ হয়, তবে y এর এমন কোন বাস্তব মান নাই যাহাতে $y^2=4ax$ সিদ্ধ হয়। ইহার অর্থ, বক্ররেখাটির কোন বিন্দু y-অক্ষের বাম পার্শ্বে অবস্থিত নহে।

কিন্তু x এর যে কোন ধনাত্মক মানের জন্য, তা সেইমান যত বৃহৎই হউক না কেন, y এর দুইটি সমান এবং বিপরীত মান বর্তমান। সুতরাং বক্ররেখাটি y-অক্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(*iii*) যখন $x=0, y^2=0$; বক্ররেখাটি মূলবিন্দু (অর্থাৎ শীর্ষ) দিয়া যায়। ইহার একটি মাত্র বিন্দু $(0,0)$; $x=0$ রেখার সহিত সমাপতিত, অর্থাৎ y-অক্ষ উহার শীর্ষতে স্পর্শক।

(*iv*) ধরা যাক K র স্থানাঙ্ক (a, l) [চিত্র 7.5]। যেহেতু K বক্ররেখাটির একটি বিন্দু,

$\therefore \quad l^2=4a.a=4a^2.$

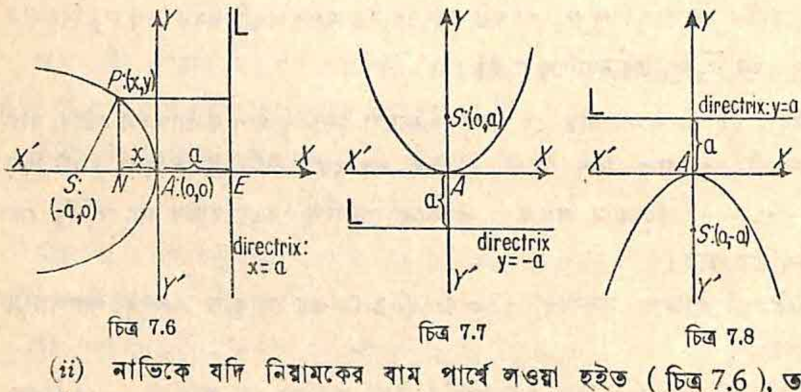
$\therefore$ দৈর্ঘ্য $\overline{SK}=2a$, সুতরাং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$

$=(y^2=4ax)$ এর প্রথম-ঘাতবিশিষ্ট পদের সহগ

এই আলোচনাসমূহ বক্ররেখা $y^2=4ax$ (একটি অধিবৃত্ত) কে অঙ্কন করিতে সাহায্য করিবে।

6. অধিবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন আকার

(*i*) **আদর্শ আকার :** $y^2=4ax$ $(a>0)$ একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার শীর্ষ $(0, 0)$; নাভি $(a, 0)$; অক্ষ : $y=0$; শীর্ষে স্পর্শক : $x=0$; নিয়ামক : $x=-a$ এবং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$ (প্রথম ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগ) (চিত্র 7.5)।



চিত্র 7.6 চিত্র 7.7 চিত্র 7.8

(*ii*) নাভিকে যদি নিয়ামকের বাম পার্শ্বে লওয়া হইত (চিত্র 7.6), তবে অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইত : $y^2=-4ax$ $(a>0)$.

এস্থলে শীর্ষ $(0, 0)$; নাভি $(-a, 0)$; অক্ষ : $y=0$; শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক : $x=0$; নিয়ামক : $x=a$; এবং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য তখনও $4a$.

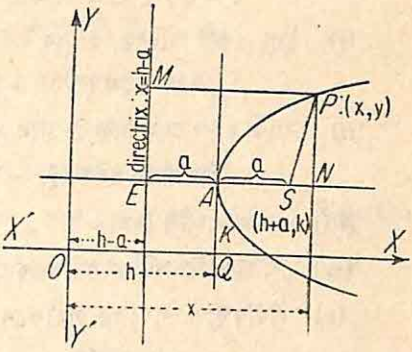
(*iii*) যদি নাভি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হইত, তবে সমীকরণটির আকার হইত $(a>0)$:

$$x^2=4ay \; ; \quad x^2=-4ay.$$

চিত্র 7.7 এবং চিত্র 7.8 দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য করিতে হইবে যে এই দুই ক্ষেত্রে নিয়ামকের সমীকরণ হইল যথাক্রমে $y=-a$ এবং $y=a$.

(*iv*) এখন এইরূপ একটি অধিবৃত্ত সম্পর্কে বিবেচনা করা যাক্, যাহার শীর্ষ (h, k) বিন্দুতে অবস্থিত, অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং নাভি শীর্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে $a(a>0)$ দূরত্বে অবস্থিত (চিত্র 7.9)। তাহা হইলে নিয়ামক y-অক্ষের সমান্তরাল এবং নাভির বাম-পার্শ্বে $2a$ দূরত্বে অবস্থিত ; সুতরাং নিয়ামকের সমীকরণ :

$$x=h-a.$$



চিত্র 7.9

অধিবৃত্তটির উপর যে কোন বিন্দু $P:(x, y)$ লইয়া সংজ্ঞার সাহায্য লইয়া পাওয়া যায়

$$|\overline{SP}| = |\overline{PM}|$$

বা, $\sqrt{(x-h-a)^2+(y-k)^2}$

$$=x-(h-a)$$

বা, $(y-k)^2=4a(x-h),\ (a>0)$

অন্যান্য আকার এখন ইহা হইতে সহজেই নিরূপণ করা যায়, যথা :

$$(y-k)^2=-4a(x-h);$$
$$(x-h)^2=4a(y-k);$$
$$(x-h)^2=-4a(y-k).$$

ইহাদের বিস্তৃতি হইতে নিম্ন আকারের সমীকরণ পাওয়া যায়, যথা

$$x=ay^2+by+c,$$

অথবা, $y=ax^2+bx+c.$

উদা. 3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তটির শীর্ষ, নাভি এবং নিয়ামক নির্ণয় কর :

$$y^2+4x+2y-8=0.$$

অধিবৃত্তটির অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর ; নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ কত ?

প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নপ্রকারে লেখা হইল, যেমন

$$(y^2+2y+1)+4x-9=0$$

অর্থাৎ, $(y+1)^2=-4(x-9/4).$

ইহাকে এই আকারে লেখা যায়, যথা : $Y^2 = -4X$, যেখানে

$Y = y+1$ এবং $X = x - 9/4$.

(i) ইহা একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষ এমন বিন্দু যেখানে $X=0$ এবং $Y=0$.

$\therefore$ শীর্ষটি হইল (9/4, −1).

(ii) নাভি হইল সেই বিন্দু যেখানে $X=-1$, $Y=0$

$\therefore$ নাভিটি হইল ($\frac{5}{4}$, −1).

(iii) নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ্য $=4$

(iv) অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ : $Y=0$, অর্থাৎ $y=-1$.

(v) শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$X=0$, অর্থাৎ $x=9/4$.

(vi) যেহেতু সমীকরণটির আকার এইরূপ, যথা $Y^2=-4X$,

$\therefore$ নিয়ামকটির সমীকরণ হইল

$X=1$, অর্থাৎ $x-9/4=1$

বা, $4x-13=0$

উদা. 4. কোন অধিবৃত্তের শীর্ষ : (3, 2) এবং নাভি : (5, 2) ; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, অধিবৃত্তটির অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল। (যুক্তি দাও।)

নাভি শীর্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত এবং উভয়ের মধ্যে দূরত্ব $=2$.

$\therefore$ শীর্ষ ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব $=2$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ : $x=3-2=1$

সুতরাং অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-5)^2+(y-2)^2=(x-1)^2$$

(নাভি হইতে দূরত্ব $)^2=($ নিয়ামক হইতে দূরত্ব $)^2$

বা, $y^2-4y-8x+28=0$.

অনুশীলনী

1. $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত (9, −12) বিন্দুগামী হইলে a'র মান নির্ণয় কর।
2. $y^2=18x$ অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুর কোটি উহার ভুজের তিনগুণের সমান ?
3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির নাভি-লম্বসমূহের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

(i) $3y^2=8x$; (ii) $(y+2)^2+4(x+3)=0$;

(iii) $(y-2)^2=8(x+1)$; (iv) $y^2-4x+2y-3=0$.

4. শীর্ষ ও নিয়ামক নিম্নে প্রদত্ত হইল ; অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নিরূপণ কর :

(i) শীর্ষ (1, 2) ; নিয়ামক $x+1=0$.

(ii) শীর্ষ (2, 1) ; নিয়ামক $y+3=0$.

5. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভি (3, 0) বিন্দুতে এবং নিয়ামক হইল $x+3=0$.

(ii) নাভি (0, 6) বিন্দুতে এবং নিয়ামক হইল x-অক্ষ।

(iii) শীর্ষ (0, 0) বিন্দুতে, অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং (−3, 6) বিন্দুগামী।

6. নাভি এবং শীর্ষ প্রদত্ত হইল ; অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভি (3, 2), শীর্ষ (1, 2) ;

(ii) নাভি (2, 1), শীর্ষ (1, 1) ;

(iii) নাভি (0, 0), শীর্ষ (−3, 0) ;

(iv) নাভি (0, 0), শীর্ষ (3, 0) ;

(v) নাভি (1, 3), শীর্ষ (−2, 3).

7. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির নাভি, শীর্ষ, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2=8y$; (ii) $3y^2+4x=0$;

(iii) $y^2-4y+6x-8=0$; (iv) $3x^2-9x-5y-2=0$;

(v) $y^2-4y-6x+13=0$; (vi) $(y-3)^2+2(x-2)=0$;

(vii) $y^2+2gx+2fy+c=0$; $(g, f, c>0)$

(viii) $x^2+4x-3y=0$.

8. যে অধিবৃত্তের নাভি (−2, −1) বিন্দুতে এবং যাহার নাভিলম্ব হইল (−2, 2) এবং (−2, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. যে অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা বিন্দুত্রয়

(3, 3), (6, 5) এবং (6, −3)

এর মধ্য দিয়া গমন করে।

10. (4, 5), (−2, 11) এবং (−4, 21) বিন্দুগামী যে অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. কোন অধিবৃত্তের শীর্ষ $2y-3x=0$ রেখার উপর অবস্থিত, উহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা $(3, 5)$ ও $(6, -1)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যায় ; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. প্রমাণ কর যে সমীকরণ

$$y^2+2Ax+2By+C=0$$

একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল ; অধিবৃত্তটির শীর্ষের স্থানাঙ্ক এবং নাভিলম্বের **সমীকরণ** নির্ণয় কর।

13. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর যে জ্যাগুলি উহার শীর্ষগামী, তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্ত $y^2=2ax$.

14. প্রমাণ কর, যে বৃত্ত x-অক্ষ হইতে $2a$ দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে এবং মূলবিন্দু হইতে b দূরত্বে y-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়া যায়, তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত ; এই অধিবৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর।

15. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একটি দ্বিগুণ-কোটি (double ordinate)র দৈর্ঘ্য $8a$; প্রমাণ কর যে শীর্ষ হইতে ইহার প্রান্তদ্বয় পর্যন্ত অঙ্কিত রেখা দুইটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

16. একটি বিন্দু এমনভাবে বিচরণ করিতেছে যে $S:(2, 2)$ এবং $S':(-2, 2)$ হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদাই $2\sqrt{5}$; এইরূপ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. $a+b\neq 0$ হইলে $y^2=2mx$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যদি উহা নিম্নের রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া যায়, যথা

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{এবং} \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$$

18. একটি অধিবৃত্ত y-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে বিস্তৃত ; y-অক্ষ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষ ; উহার নাভি হইল $(0, 3)$ এবং নাভিলম্ব 12 ; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. একটি অধিবৃত্তাকার (parabolic) খিলানের (arch) উচ্চতা 25 মিটার এবং উহার দুই প্রান্তস্থ পিল্লার মধ্যবর্তী দূরত্ব (span) 40 মিটার। উহার মধ্যবর্তী অবস্থান হইতে প্রত্যেক পার্শ্বে 8 মিটার দূরে খিলানটির উচ্চতা কত ?

20. ধর $x=u\cos\alpha.t$

$$y=u\sin\alpha.t-\tfrac{1}{2}gt^2 \ (g=\text{ধ্রুবক})$$

t অপনয়ন কর এবং দেখাও যে (x, y) বিন্দু একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত ; অধিবৃত্তটির শীর্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। নাভির স্থানাঙ্কদ্বয় কত ? প্রমাণ কর যে নিয়ামক মূলবিন্দু হইতে $u^2/2g$ উচ্চতায় অবস্থিত।

উত্তরমালা

1. $a=4$. **2.** (2, 6). **3.** (*i*) 8/3 ; (*ii*) 4 ; (*iii*) 8 ; (*iv*) 4.

4. (*i*) $y^2-8x-4y+12=0$; (*ii*) $x^2-4x-16y+20=0$.

5. (*i*) $y^2-12x=0$; (*ii*) $x^2-12y+36=0$; (*iii*) $y^2+12x=0$

6. (*i*) $y^2-8x-4y+12=0$; (*ii*) $y^2-4x-2y+5=0$;

(*ii*) $y^2-12x-36=0$; (*iv*) $y^2+12x-36=0$;

(*v*) $y^2-6y-12x-15=0$. **7.** (*i*) (0, 2) ; (0, 0) ; 8 ; $y+2=0$

(*ii*) $(-\frac{1}{3}, 0)$; (0, 0) ; 4/3 ; $3x-1=0$ (*iii*) (1/2, 2) ; (2, 2) ; 6 ; $2x-7=0$.

(*iv*) (3/2, −4/3) ; (3/2 −7/4) ; 5/3 ; $6y+13=0$.

(*v*) (3, 2) ; (3/2, 2) ; 6 ; $x=0$ (*vi*) (3/2, 3) ; (2, 3) ; 2 ; $2x-5=0$.

(*vii*) $\left(\frac{c-f^2-g^2}{2g}, -f\right)$; $\left(\frac{c-f^2}{2g}, -f\right)$; $2g$; $2gx=c-f^2+g^2$.

(*viii*) (−2, −7/12) ; (−2, −1/3) ; 3 ; $12y+25=0$.

8. $y^2+2y-6x-20=0$, $y^2+2y+6x+4=0$.

9. $y^2-2y-4x+9=0$. **10.** $x^2-4x-2y+10=0$.

11. $y^2-6y-4x+17=0$, $11y^2-98y-108x+539=0$

12. $\left(\frac{B^2-C}{2A}, -B\right)$; $2Ax=B^2-A^2-C$. **14.** $x^2-2yb=a^2-b^2$.

16. $x^2+5y^2-20y+15=0$. **17.** $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$.

18. $x^2=12y$. **19.** 21 মিটার।

20. $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)$; $\frac{2u^2 \cos^2\alpha}{g}$; $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{-u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right)$.

শীর্ষ নাভিলম্ব নাভি

কনিক্ সেক্সন্স্—অধিবৃত্ত

(সংক্ষিপ্তসার)

(Summary)

সংজ্ঞা। যে বিন্দু এইভাবে বিচরণ করে যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু S (নাভি) হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির সরলরেখা L (নিয়ামক) হইতে উহার দূরত্বের সহিত ধ্রুবক অনুপাতে (উৎকেন্দ্রতা e) থাকে, তাহার সঞ্চারপথকে একটি কনিক্ সেক্সন্ (বা একটি কনিক্) বলে।

তিন প্রকার কনিক্। অধিবৃত্ত : $e=1$

উপবৃত্ত : $0<e<1$ ⎫ … কেন্দ্রবিশিষ্ট কনিক্

পরাবৃত্ত : $e>1$ ⎭ (central conics)

অধিবৃত্ত

1. ইহা একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ। S এর মধ্য দিয়া অঙ্কিত L এর উপর লম্ব রেখা হইল **অধিবৃত্তটির অক্ষ**। নাভি ও নিয়ামকের সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দুকে **শীর্ষ** বলা হয়।

নাভি, $=(h, k)$, **নিয়ামক** : $ax+by+c=0$,

সমীকরণ : $$(x-h)^2+(y-k)^2=\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

2. **আদর্শ সমীকরণ**। $y^2=4ax(a>0)$ [$\overline{PN}^2=4\overline{AS}.\ \overline{AN}$]

শীর্ষ A = মূলবিন্দু $(0, 0)$—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ

নাভি S $=(a, 0)$, নিয়ামক L হইল $x+a=0$.

বক্ররেখাটির এমন কোন বিন্দু বিদ্যমান নহে যাহার ক্ষেত্রে $x<0$.

প্রত্যেক $x>0$র জন্য y এর দুইটি সমান ও বিপরীত চিহ্নের মান আছে; বক্ররেখাটি x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।

বক্ররেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।

নাভিগামী দ্বিগুণ-কোটি = নাভিলম্ব $=4a$.

3. **অন্যান্য আদর্শ সমীকরণ**

(i) $y^2=-4ax(a>0)$

শীর্ষ A$(0, 0)$—অক্ষ x-অক্ষ। নাভি $=(-a, 0)$. নিয়ামক হইল $x=a$; বক্ররেখা ঋণাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব $=4a$.

(*ii*) $x^2=4ay\ (a>0)$

শীর্ষ A $(0,0)$—অক্ষ y-অক্ষ। নাভি$=(0, a)$; নিয়ামক হইল $y=-a$; বক্ররেখা ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(*iii*) $x^2=-4ay\ (a>0)$

শীর্ষ A $(0,0)$—অক্ষ y-অক্ষ। নাভি$=(0,-a)$, নিয়ামক হইল $y=+a$; বক্ররেখা ঋণাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(*iv*) $(y+k)^2=4a(x-h)\ (a>0)$.

শীর্ষ A (h, k)—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল (যাহার সমীকরণ $y=k$),

নাভি $(h+a, k)$; নিয়ামক $x=h-a$.

বক্ররেখা ধনাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(*v*) $(y-k)^2=-4a(x-h)\ (a>0)$

শীর্ষ A (h,k) বিন্দুতে—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল ($y=k$ হইল উহার সমীকরণ)।

নাভি$=(h-a, k)$; নিয়ামক হইল $x=h+a$.

বক্ররেখাটি ঋণাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(*vi*) $(x-h)^2=4a\ (y-k)\ (a>0)$

বক্ররেখা ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।

অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল ($x=h$ হইল উহার সমীকরণ)।

শীর্ষ A$=(h, k)$। নাভি$=(h, k+a)$. নিয়ামক হইল $y=k-a$.

(*vii*) $(x-h)^2=-4a(y-k)\ (a>0)$

বক্ররেখা ঋণাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।

অক্ষ হইল $x=h$; শীর্ষ A$=(h, k)$; নাভি$=(h, k-a)$.

নিয়ামক হইল $y=k+a$.

7·4. উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

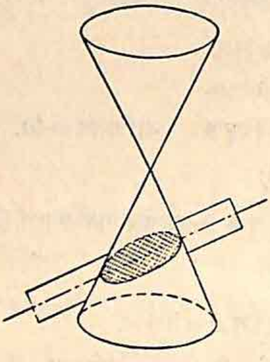
1. সংজ্ঞা। উপবৃত্ত হইল একটি বিন্দু Pর সঞ্চারপথ, যে P বিন্দু এমনভাবে বিচরণ করে যে একটি স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির রেখা L হইতে উহার লম্ব-দূরত্বের সহিত নিয়ত একটি ধ্রুবক অনুপাত $e\ (0<e<1)$ তে থাকে। ইহা স্পষ্টভাবে প্রকাশ থাকে যে

(*i*) P বিন্দু L রেখা এবং S বিন্দুর ধারক সমতলে অবস্থিত এবং

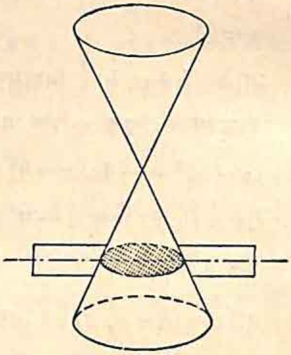
(*ii*) S বিন্দু L রেখার উপর অবস্থিত নহে।

নির্দিষ্ট বিন্দু S কে বলা হয় উপবৃত্তটির **নাভি**, নির্দিষ্ট রেখা L কে S এর অনুরূপ **নিয়ামক** এবং ধ্রুবক অনুপাত e $(0<e<1)$ কে উপবৃত্তটির **উৎকেন্দ্রতা** বলে।

2. উপবৃত্ত একটি কনিক্ সেক্সন্; **অর্থাৎ,** একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুকে ঐ শঙ্কু উৎপাদক রেখার (generator of the cone) সহিত কোন কোণে নত (**উহার**



চিত্র 7.10



চিত্র 7.11

সহিত সমান্তরাল নহে) সমতল দ্বারা ছেদের ফলে ছেদ-তলে ইহা পাওয়া যায়। কিন্তু যদি ছেদক তলটি শঙ্কুর অক্ষের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত হয়, তবে প্রাপ্ত সেক্সন্ একটি **বৃত্ত**—যাহা উপবৃত্তের একটি সীমাস্থ অবস্থা। চিত্র 7.10 (উপবৃত্ত) এবং চিত্র 7.11 (বৃত্ত) দ্রষ্টব্য।

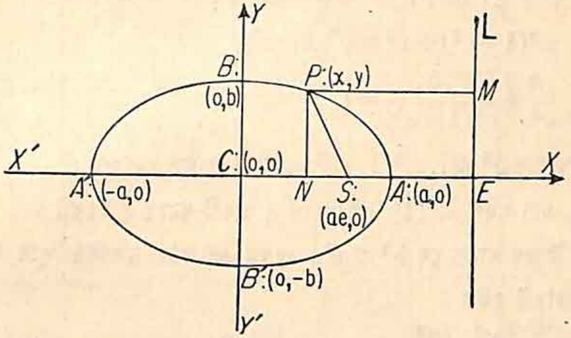
3. উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক্, কোন উপবৃত্তের S নাভি এবং রেখা L অনুরূপ নিয়ামক। S বিন্দুর মধ্য দিয়া L রেখার উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল [চিত্র 7.12]। $\overleftrightarrow{SE}$ রেখার উপর A এবং A′ এইরূপ দুইটি বিন্দু লওয়া হইল যেন উহারা $\overline{SE}$ রেখাংশকে $e:1$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে, যেখানে e হইল উপবৃত্তটির প্রদত্ত উৎকেন্দ্রতা $(0<e<1)$। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে A এবং A′ উপবৃত্তস্থ বিন্দু ($\because$ $\overline{SA}=e.\overline{AE}$ এবং $\overline{A'S}=e.\overline{A'E}$).

ধরা যাক্, $\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C.

এখন এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ নিম্ন প্রকারে নির্বাচন করা হইল :

C কে মূলবিন্দু (0, 0), $\overleftrightarrow{CE}$ রেখাকে x-অক্ষ, Cর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{CE}$র উপর অঙ্কিত লম্ব রেখা $\overleftrightarrow{CY}$ কে y-অক্ষ লওয়া হইল।



চিত্র 7.12

প্রথমত দুইটি গুরুত্বপূর্ণ সম্বন্ধ নিরূপণ করা হইবে, যথা :

(i) $\overline{CS}=e.\overline{CA}$ এবং (ii) $\overline{CA}=e.\overline{CE}$.

অনুসৃত অঙ্কনকার্য হইতে ইহা পাওয়া যায় যে

$$\overline{SA}=e.\overline{AE}\ ;\ \overline{A'S}=e.\overline{A'E}$$

$$\therefore\ \overline{A'A}=\overline{A'S}+\overline{SA}=e.(\overline{A'E}+\overline{AE})=e.(\overline{A'C}+\overline{CE}+\overline{CE}-\overline{CA})$$

$$=2e.\overline{CE}\quad (\because\ \overline{A'C}-\overline{CA}=0),$$

সুতরাং $\overline{CA}=e.\overline{CE}$ ····অর্থাৎ (ii) সম্পর্কটি প্রমাণিত হইল।

আবার, $2\overline{CS}=\overline{A'S}-\overline{SA}$ ($\because$ $\overline{A'S}=\overline{A'C}+\overline{CS}$ এবং $\overline{SA}=\overline{CA}-\overline{CS}$)

$$=e.(\overline{A'E}-\overline{AE})=e.\overline{A'A}=2e.\overline{CA},$$

সুতরাং $\overline{CS}=e.\overline{CA}$··· ···অর্থাৎ সম্পর্ক (i) প্রমাণিত হইল।

ধরা যাক্ $\overline{CA}=a$; তাহা হইলে (i) ও (ii) হইতে

$$\overline{CS}=ae \text{ এবং } \overline{CE}=a/e.$$

তাহা হইলে

S এর স্থানাঙ্ক হইল $(ae, 0)$,

A'র স্থানাঙ্ক হইল $(a, 0)$,

এবং নিয়ামক L এর সমীকরণ হইল $x=a/e$.

ধরা যাক্, P : (x, y) উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু। নিয়ামক L এর উপর $\overline{PM}$ লম্বপাত করা হইল। এখন উপবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে লেখা যায়,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}\ ;\ \text{বা,}\quad |\overline{SP}|^2=e^2.|\overline{PM}|^2$$

$$\therefore\ (x-ae)^2+y^2=e^2(a/e-x)^2\quad [\because\ \overline{PM}=\overline{NE}=\overline{CE}-\overline{CN}]$$

অর্থাৎ, $x^2-2x.ae+a^2e^2+y^2=a^2+e^2x^2-2a.xe.$

বা, $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2).$

অর্থাৎ, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$

এখন, যেহেতু $e^2<1$, $a^2(1-e^2)$ রাশিটি স্পষ্টত ধনাত্মক ;

সুতরাং ধরা হইল $a^2(1-e^2)=b^2$ (একটি ধনাত্মক সংখ্যা)।

প্রসঙ্গত উল্লেখ থাকে যে $b^2<a^2$. এখন এই মান বসাইয়া পূর্বে প্রাপ্ত সম্পর্কটির সরলতর আকারটি হইল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \cdots\quad\cdots\quad \text{(I)}$$

যেখানে $b^2=a^2(1-e^2)$ এবং $b^2<a^2$.

উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে (এবং অপর কোন বিন্দুর জন্য নহে) এই সম্পর্ক বজায় থাকে, সুতরাং ইহাই উপবৃত্তটির সমীকরণ।

টীকা। (*i*) উপবৃত্তটি x-অক্ষকে A : $(a, 0)$ এবং A′ : $(-a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে [(I) এ $y=0$ বসাইলে $x=\pm a$ পাওয়া যায়]। এই বিন্দু দুইটিকে উপবৃত্তটির শীর্ষদ্বয় বলা হয়।

(*ii*) উপবৃত্তটি Y-অক্ষকে B : $(0, b)$ এবং B′ : $(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

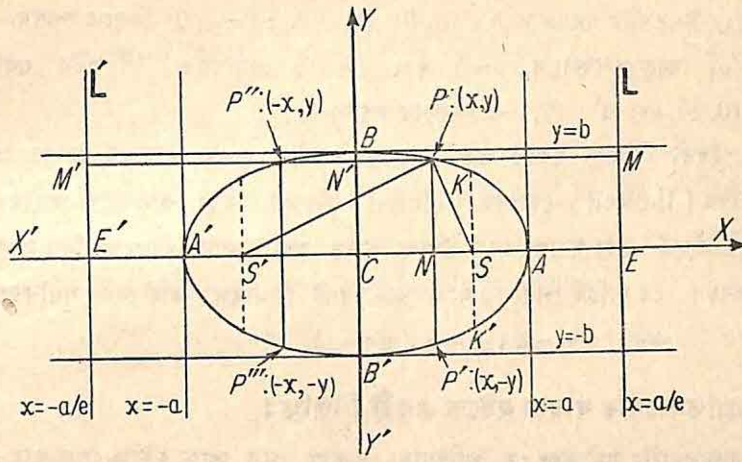
সংজ্ঞা। রেখাংশ $\overline{A'A}$কে উপবৃত্তটির **পরাক্ষ** (major axis) এবং রেখাংশ $\overline{B'B}$ কে উহার **উপাক্ষ** (minor axis) বলা হয় ($b^2<a^2$ বলিয়া ইহাকে উপাক্ষ বলা হয়)। $\overline{A'A}$'র মধ্যবিন্দুকে, অর্থাৎ, C বিন্দুকে উপবৃত্তটির কেন্দ্র (centre) বলা হয়। স্পষ্টত,

$$\overline{A'A}=2a\ \text{এবং}\ \overline{B'B}=2b$$

টীকা। কখনও কখনও সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{A'A}$ (অর্থাৎ উভয় পার্শ্বে বর্ধিত $\overline{A'A}$ রেখাংশকে **পরাক্ষ রেখা** বলিয়া উল্লেখ করা হয় ; অনুরূপ $\overleftrightarrow{B'B}$কে **উপাক্ষ রেখা** বলা হইয়া থাকে। কিন্তু প্রাসঙ্গিক বিষয় হইতে কেবল রেখাংশ অথবা সমগ্র রেখাটি সম্পর্কে বলা হইতেছে কিনা, তাহা স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

4. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের আকৃতি

নিম্নলিখিত আলোচনাসমূহের জন্য চিত্র 7.13 এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা হইতেছে :



চিত্র 7.13

(*i*) ইহা সহজেই যাচাই করিয়া দেখা যাইবে যে, যদি P : (x, y) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু হয়, তবে বিন্দুদ্বয় P′ এবং P″, যাহাদের স্থানাঙ্কগুলি হইল যথাক্রমে $(x, -y)$ এবং $(-x, y)$, উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত হইবে।

সিদ্ধান্ত : উপবৃত্তটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ অর্থাৎ উভয় অক্ষ সম্পর্কেই প্রতিসম।

আবার P (x, y) উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু হইলে P‴ : $(-x, -y)$ এর স্থানাঙ্কও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ইহার অর্থ হইল এই যে C বিন্দুগামী প্রত্যেক রেখা বক্র-রেখাটিকে C হইতে সমদূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে ; অর্থাৎ C বিন্দুগামী প্রত্যেক জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। উপবৃত্তটির কেন্দ্রের ইহা হইল একটি ধর্ম।

(*ii*) $\because y^2=b^2(1-x^2/a^2)$, সুতরাং যদি $x^2>a^2$ হয়, (অর্থাৎ, যদি $x>a$ বা $x<-a$ হয়), তবে y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না।

সিদ্ধান্ত : $x=a$ রেখার দক্ষিণ পার্শ্বে, অথবা $x=-a$ রেখার বাম পার্শ্বে উপবৃত্তটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

ii $\because x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ সুতরাং x এর কোন বাস্তব মান বিদ্যমান হইবে না, যদি $y^2>b^2$ হয়, (অর্থাৎ যদি $y>b$ বা $y<-b$ হয়)।

সিদ্ধান্তঃ $y=b$ রেখার বাহিরে উপরের পার্শ্বে, অথবা $y=-b$ রেখার নিচে উপবৃত্তটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

(iv) যখন $x=+a$ বা $x=-a$, $y^2=0$; অর্থাৎ, $x=a$ এবং $x=-a$ রেখাদ্বয় উপবৃত্তটির যথাক্রমে A : $(a, 0)$ এবং $-$A$'$: $(-a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শক।

(v) **অনুরূপভাবে,** $y=b$ এবং $y=-b$ রেখাদ্বয়ও উপবৃত্তটির যথাক্রমে B : $(0, b)$ এবং B$'$: $(0, -b)$ বিন্দুতে স্পর্শক।

পূর্ববর্তী বিশ্লেষণ হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে উপবৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ (limited) এবং বদ্ধ (closed) বক্ররেখা—ইহা কোন দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত নহে। ইহা পরাক্ষ এবং উপাক্ষ উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্রবিন্দু সম্পর্কেও প্রতিসম। যে চারিটি স্পর্শকের মধ্যে বক্ররেখাটি সীমাবদ্ধ, তাহাদের সমীকরণগুলি হইল : $x=a$; $x=-a$; $y=b$; $y=-b$.

প্রতিসাম্যের ধারণা হইতে একটি সিদ্ধান্ত :

বক্ররেখাটির সমীকরণ যে প্রতিসাম্য প্রকাশ করে তাহা হইতে দেখা যায় যে C হইতে S এর সমান দূরত্বে পরাক্ষের উপর একটি দ্বিতীয় নাভি S$'$ অবশ্যই থাকিবে এবং এই নাভি S$'$ এর অনুরূপ একটি দ্বিতীয় নিয়ামক L$'$ ও অবশ্যই আছে, যাহা মূল নিয়ামক L এর সমান্তরাল এবং যাহা পরাক্ষকে এমন একটি E$'$ বিন্দুতে ছেদ করে যে

$$|\overline{E'C}|=|\overline{CE}|=\frac{a}{e} \text{ হয়।}$$

$\therefore$ L$'$ এর সমীকরণ হইবে $x=-a/e$; S$'$ এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-ae, 0)$।

(vi) উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে যদি পরাক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন করা হয়, এবং যদি ঐ রেখাংশকে বর্ধিত করা হয়, যাহাতে উহা বক্ররেখাটিকে পুনরায় P$'$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে

$$\overline{NP}=\text{P এর কোটি}$$

$$\text{এবং } \overline{P'NP}=\text{P এর দ্বিগুণ-কোটি।}$$

বিশেষভাবে উল্লেখ্য যে, নাভীগামী দ্বিগুন-কোটিকে উপবৃত্তটির নাভিলম্ব বলা হয়। উপবৃত্তের দুইটি নাভিলম্ব বর্তমান—চিত্রে ডট্ দ্বারা অংকিত সরলরেখাদ্বয় দ্রষ্টব্য।

এক্ষণে প্রমাণ করা হইবে যে প্রত্যেকটি নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হইল $2b^2/a$

প্রমাণ। ধরা যাক নাভি S গামী নাভিলম্ব $\overline{KK'}$ এবং ধরা যাক্, কোটি $\overline{SK}=l$; তাহা হইলে Kর স্থানাঙ্ক হইল (ae, l)। কিন্তু যেহেতু K উপবৃত্তস্থ বিন্দু, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক উপবৃত্তটির সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে : সুতরাং

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1,$$

অর্থাৎ $l^2=b^2(1-e^2)=b^2.\frac{b^2}{a^2}$ $[\because b^2=a^2(1-e^2)]$

$\therefore$ অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{b^2}{a}$.

এবং **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য** $=\frac{2b^2}{a}$.

(vii) বক্ররেখাটির সমীকরণ হইতে উপবৃত্তটির একটি জ্যামিতিক ধর্ম সহজেই পাওয়া যায় :

যদি P এর কোটি $\overline{PN}$ হয়, তবে উপবৃত্তটির সমীকরণ, যথা :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, হইতে ইহা পাওয়া যায় যে (চিত্র 7.13 দ্রষ্টব্য)

$$\frac{\overline{CN}^2}{a^2}+\frac{\overline{PN}^2}{b^2}=1,$$

অর্থাৎ, $$\frac{\overline{PN}^2}{b^2}=1-\frac{\overline{CN}^2}{a^2}=1-\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{CA}^2-\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}$$

$$=\frac{(\overline{CA}+\overline{CN}).(\overline{CA}-\overline{CN})}{\overline{CA}^2}$$

$$=\frac{(\overline{A'C}+\overline{CN}).\overline{NA}}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{A'N}.\overline{NA}}{\overline{CA}^2}$$

$\therefore$ $\frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{NA}}=\frac{b^2}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}=$ P এর সকল অবস্থানে ধ্রুবক।

হুবহু অনুরূপ পদ্ধতিতে ছাত্রছাত্রীরা প্রমাণ করিতে পারে যে

$$\frac{\overline{PN'}^2}{\overline{B'N'}.\overline{N'B'}}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}$$

$(viii)$ উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (Focal distance)

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Pর দুইটি নাভি-দূরত্ব আছে, $\overline{SP}$ এবং $\overline{S'P}$; ইহাদের P বিন্দুর নাভি-ব্যাসার্ধও (focal radii) বলা হয়। এখন প্রমাণ করা হইবে যে Pর যে কোন অবস্থানে ইহাদের সমষ্টি ধ্রুবক।

চিত্র 7.13 প্রসঙ্গে ইহা লেখা যায় যে

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}=e\left(\frac{a}{e}-x\right)=a-ex$$

এবং $\overline{S'P}=e.\ \overline{PM'}=e\left(\frac{a}{e}+x\right)=a+ex$

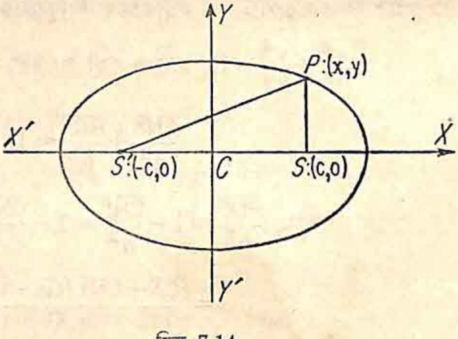
$\therefore\ \overline{SP}+\overline{S'P}=2a=$ যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে ধ্রুবক রাশি,

($\because$ ইহা x-নিরপেক্ষ)।

5. উপরি-উক্ত ধর্মটিকে [অর্থাৎ, উপরের 4নং এর (viii)] উপবৃত্তের একটি বিকল্প সংজ্ঞা হিসাবে গ্রহণ করা যায়, যথা :

কোন বিন্দু কোন সমতলে যদি এইরূপভাবে বিচরণ করে যে ঐ সমতলস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব দুইটির সমষ্টি ধ্রুবক হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত। নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটিকে তখন নাভি বলা হয়।

এই সংজ্ঞার সাহায্যে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ করা যায় —চিত্র 7.14 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 7.14

S এবং S' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(c, 0)$ এবং $(-c, 0)$ ধরা হইল, অর্থাৎ $\overline{SS'}$ এর মধ্যবিন্দু C কে মূলবিন্দু লওয়া হইল; রেখা $\overleftrightarrow{S'S}$ কে x-অক্ষ এবং C গামী ও $\overline{SS'}$ এর উপর লম্ব রেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল।

তাহা হইলে, উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞা অনুসারে

$$\overline{SP}+\overline{S'P}=\text{একটি ধ্রুবক } (=2a, \text{ মনে করা যাক }),$$

যেখানে P : (x, y) হইল উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু।

ধরা হইল, $a>c$

$\therefore\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

বা, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

বর্গ করিয়া এবং সরল করিয়া,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

বা, $cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

পুনরায় বর্গ করিয়া,

$$c^2x^2+a^4-2a^2cx=a^2\{(x-c)^2+y^2\}$$

বা, $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

ধরা হইল, $a^2-c^2=b^2$ (একটি ধনসংখ্যা কারণ $a^2>c^2$) ;

সুতরাং $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহাই হইল উপবৃত্তটির সমীকরণ।

দেখা গেল, বিকল্প সংজ্ঞাটি হইতেও একই সমীকরণে উপনীত হওয়া যায় ; উল্লেখ থাকে যে এখন ইহা প্রমাণ করা সম্ভব যে নাভি, ধরা যাক S, হইতে যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর দূরত্ব, রেখা L : $x=a^2/c$ হইতে উহার দূরত্বের সহিত একটি ধ্রুবক অনুপাত c/a উৎপন্ন করে। সুতরাং এইক্ষেত্রে ধ্রুবক অনুপাত (উৎকেন্দ্রতা বলিয়া কথিত) $e=c/a$.

তাহা হইলে উপবৃত্তের সংজ্ঞা দুইটির মধ্যে তুল্যতা প্রমাণিত হইবে।

6. উপবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার

(*i*) যদি নাভি S কে y-অক্ষের উপর এবং নিয়ামক L কে x-অক্ষের সমান্তরাল লওয়া হইত, তবে উপবৃত্তটির সমীকরণ নিরূপণ একই যুক্তি অনুসরণ করিয়া অগ্রসর হইত, কেবল এক্ষেত্রে x এবং y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ের প্রয়োজন হইত। সুতরাং তখন সমীকরণটি হইত :

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a^2>b^2)$$

যাহা এমন উপবৃত্তকে প্রকাশ করে যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর থাকে।

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এক্ষেত্রে $y=\pm a/e$.

একটি কার্যকরী ইঙ্গিত :

সমীকরণটি এই আকারে লিখিত হইলে যথা :

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

যদি $A^2>B^2$ হয়, তবে পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর আছে ;

যদি $A^2<B^2$ হয়, তবে পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর আছে।

(*ii*) কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে থাকিলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (a^2>b^2),$$

যেখানে পরাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

(*iii*) কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে হইলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad (a^2>b^2),$$

যেখানে পরাক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল।

(*ii*) এবং (*iii*) এর আকার অনুচ্ছেদ 7·3, নং 6 (*iv*) এর অনুরূপ।

উদা. 5. উপবৃত্ত $4x^2+3y^2=24$ এর পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং নাভি-লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উহার উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামক দুইটির সমীকরণও নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে এই আকারে লেখা হইল, যথা :

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1.$$

এখানে পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর আছে।

সুতরাং $a^2=8$, $b^2=6$; পরাক্ষ ও উপাক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য তাহা হইলে যথাক্রমে

$$2\sqrt{8} \text{ এবং } 2\sqrt{6}$$

এবং প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2.\dfrac{6}{\sqrt{8}}=3\sqrt{2}.$

যদি e উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে

$$b^2=a^2(1-e^2)$$

বা, $6=8\,(1-e^2)$, অর্থাৎ $e=\frac{1}{2}$.

[eর ঋণাত্মক মান গ্রহণীয় নহে, কারণ e মূলত ধনাত্মক।]

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(0, \pm 2\sqrt{2}.\frac{1}{2})$, বা, $(0, \pm\sqrt{2})$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{1/2}=\pm 4\sqrt{2}.$$

উদা. 6. নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তটির কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়, অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

$$2x^2+3y^2-4x+5y+4=0.$$

প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নপ্রকারে লেখা হইল, যথা :

$$2(x^2-2x+1)+3\left(y^2+\frac{5}{3}y+\frac{25}{36}\right)+4-2-\frac{25}{12}=0$$

বা, $2(x-1)^2+3\left(y+\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{1}{12}$

বা, $\dfrac{(x-1)^2}{1/24}+\dfrac{(y+\frac{5}{6})^2}{1/36}=1.$

ইহাকে এই আকারে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{X^2}{1/24}+\frac{Y^2}{1/36}=1,$$

যেখানে $X=x-1,\ Y=y+5/6.$

(*i*) এই আকারে, কেন্দ্র হইল $X=0,\ Y=0,$

অর্থাৎ, $x-1=0$ এবং $y+\frac{5}{6}=0$

$\therefore$ **কেন্দ্রটির স্থানাঙ্ক হইল $(1, -5/6)$.**

(*ii*) পরাক্ষ এবং উপাক্ষের সমীকরণ হইল যথাক্রমে

$Y=0$ এবং $X=0$

অর্থাৎ, $y=-5/6$ এবং $x=1.$

(*iii*) যদি a এবং b যথাক্রমে অর্ধ-পরাক্ষ এবং অর্ধ-উপাক্ষ হয়,

তাহা হইলে $a^2=1/24,\ b^2=1/36,$

এবং $b^2=a^2\ (1-e^2)$ হইতে পাওয়া যায়

$$1/36=1/24\ (1-e^2),$$

সুতরাং $e=1/\sqrt{3}$ (ঋণাত্মক মান বাতিল করিয়া)।

(*iv*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(X=\pm ae,\ Y=0)$

অর্থাৎ, $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{12},\ -\frac{5}{6}\right)$

(*v*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$X=\pm ae,$ অর্থাৎ, $x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},$

অর্থাৎ, $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$

(*vi*) নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=2.\ \frac{1}{36}\times\sqrt{24}$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{24}.$$

অনুশীলনী

(এই পরিচ্ছেদের শেষে প্রদত্ত সংক্ষিপ্তসার দ্রষ্টব্য)

নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তগুলির এই বিষয়গুলি নির্ণয় কর, যথা :

(a) অর্ধ-পরাক্ষের দৈর্ঘ্য ; (b) অর্ধ-উপাক্ষের দৈর্ঘ্য ;

(c) উৎকেন্দ্রতা ; (d) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ;

(e) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ ; (f) প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ;

[প্রশ্ন 6 হইতে প্রশ্ন 10 এর ক্ষেত্রে কেন্দ্রের স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।]

1. $x^2+2y^2=2.$ **2.** $3x^2+4y^2=48.$

3. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1.$ **4.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1.$

5. $225x^2+289y^2=65025.$ **6.** $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1.$

7. $\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1.$ **8.** $x^2+2y^2-8y+6=0.$

9. $2x^2+3y^2-4x+12y+13=0.$

10. $5x^2+9y^2-30x-36y+36=0.$

11. p এর মান কত হইলে উপবৃত্ত $px^2+4y^2=1$ বিন্দুদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এর মধ্য দিয়া গমন করিবে ? উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

12. উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ রেখাদ্বয় $7x+13y=87$ এবং $5x-8y+7=0$ এর ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যায় এবং উহার নাভিলম্ব $\frac{32\sqrt{2}}{5}$; a এবং b নির্ণয় কর।

প্রশ্ন 13 হইতে প্রশ্ন 16এর ক্ষেত্রে ধরিয়া লও যে পরাক্ষ হইল x-অক্ষ এবং উপাক্ষ হইল y-অক্ষ। এখন নিম্নে প্রদত্ত ক্ষেত্রগুলিতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যথা :

13. উপবৃত্তটির দুইটি বিন্দু হইল $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$.

14. উপবৃত্তটির একটি বিন্দু $(-3, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

15. উৎকেন্দ্রতা $=4/5$ এবং প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=6$.

16. উৎকেন্দ্রতা $=1/3$ এবং নাভিদ্বয় হইল $(\pm 3, 0)$.

17(a). চিত্র 7.12 প্রসঙ্গে যাচাই করিয়া দেখাও যে.

$$\overline{CS}.\overline{CE}=\overline{CA}^2 ;$$

ধরিয়া লও যে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+2y^2=2$.

(ইহা উপবৃত্তের এক গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম।)

(*b*) দেখাও যে নাভি এবং পরাক্ষের যে কোন একটি প্রান্তবিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য অর্ধ-পরাক্ষের সমান।

18. (*a*) নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তস্থ বিন্দু $(4\sqrt{3}, 5)$ এর নাভি-ব্যাসার্ধদ্বয় (focal radii) এর দৈর্ঘ্য এবং **সমীকরণ** নির্ণয় কর :

$$25x^2+16y^2=1600.$$

(*b*) যদি S কোন উপবৃত্তের নাভি এবং P, Q, R উহার উপর তিনটি বিন্দু হয় এবং যদি এই বিন্দুত্রয়ের ভুজগুলি A.P. তে থাকে, তবে দেখাও যে $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$, $\overline{SR}$ ও A.P. তে থাকিবে।

19. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত (data) হইতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(*i*) অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 এবং 6 ; পরাক্ষের সমীকরণ $y=2$ এবং উপাক্ষের সমীকরণ $x=3$.

(*ii*) নাভিদ্বয় $(-1, 1)$ এবং $(3, 1)$; উৎকেন্দ্রতা $=2/3$.

(*iii*) পরাক্ষের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(-1, 1), (3, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

20. কোন উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, উহার একটি নাভি $(0, 3)$ এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 5 হইলে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

21. একটি বিন্দু এইরূপে সঞ্চার করে যে $(4, 0)$ বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব, $x=16$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের সর্বদা অর্ধেক ; প্রমাণ কর যে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল একটি উপবৃত্ত, যাহার উৎকেন্দ্রতা 1/2.

22. একটি বিন্দু (x, y) এইরূপে গতিশীল যে $(4, 2)$ এবং $(-2, 2)$ বিন্দুদ্বয় হইতে উহার দূরত্ব দুইটির সমষ্টি 8 হয়। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নিরূপণ কর।

23. কেন্দ্র, অর্ধ-অক্ষদ্বয়, শীর্ষদ্বয়, নাভিদ্বয়, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উপবৃত্তের সমীকরণ হয়

(*i*) $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0.$

(*ii*) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0.$

24. অর্ধ-উপবৃত্তাকার এক খিলানের দুই **প্রান্তস্থ** পিলারদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব (span) হইল 150 মিটার এবং উহার সর্বাধিক উচ্চতা 45 মিটার। মধ্য-অবস্থানের উভয় পার্শ্বে ঐ স্থান হইতে প্রতিটি 25 মিটার দূরে দুইটি উল্লম্ব ধারক-স্তম্ভ আছে। এই স্তম্ভ দুইটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

25. যে উপবৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ বিন্দুতে ও একটি নাভি $(6, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা $(4, 6)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

26. যে উপবৃত্তের কেন্দ্র $(-1, -1)$ বিন্দুতে, শীর্ষ $(5, -1)$ বিন্দুতে এবং উৎকেন্দ্রতা $e=2/3$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

27. কোন উপবৃত্তের নাভি $(4, -3)$ বিন্দুতে, নিয়ামক $x=-1$ এবং উৎকেন্দ্রতা $2/3$; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত: চিত্র অঙ্কন করিয়া সংজ্ঞার সাহায্য লও]

28. (i) একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইল $(0, \pm\sqrt{5})$ এবং নাভি-লম্ব$=8/3$; উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

(ii) অনুরূপ প্রশ্ন, কিন্তু নাভি $(0, \pm 4)$ এবং উপবৃত্তটি $(12/5, 3)$ বিন্দুগামী।

29. $x^2+y^2=25$ বৃত্তস্থ বিন্দুসমূহের কোটিগুলিকে যে বিন্দুসকল $3:5$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহাদের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

30. কোন উপবৃত্তের উপাক্ষের ধনাত্মক প্রান্তবিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত জ্যাগুলির মধ্য-বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

31. একটি গতিশীল রেখার দৈর্ঘ্য $a+b$ নির্দিষ্ট; রেখাটি এইরূপে গতিশীল যে উহার প্রান্তদ্বয় সর্বদা দুইটি নির্দিষ্ট ও পরস্পর লম্ব সরলরেখার উপর অবস্থান করে; প্রমাণ কর, যে বিন্দু এই রেখাকে a এবং b দৈর্ঘ্যের রেখাংশে বিভক্ত করে তাহার সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত।

*32. জ্যামিতির সাহায্যে সমাধান কর (রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে):

(i) কেন্দ্র সহ একটি উপবৃত্ত প্রদত্ত আছে, ইহার অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর।

(ii) অক্ষদ্বয় সহ একটি উপবৃত্ত প্রদত্ত আছে, নাভিদ্বয় চিহ্নিত কর।

(iii) অক্ষদ্বয় সহ একটি উপবৃত্ত প্রদত্ত আছে, নিয়ামকদ্বয় অঙ্কন কর।

(iv) উপবৃত্তের নাভিদ্বয় এবং পরাক্ষ প্রদত্ত আছে, নিয়ামকদ্বয় অঙ্কন কর।

[$\overline{CS}.\overline{CE}=\overline{CA}^2$ এর সাহায্য লও: উপরে প্রদত্ত উদা. 17 দেখ।]

(v) উপবৃত্তের নাভিদ্বয় এবং পরাক্ষ প্রদত্ত হইল; দেখাও কিভাবে বক্ররেখাটির বিন্দুসমূহ অঙ্কন করা যায়।

(vi) উপবৃত্তের নাভিদ্বয় এবং একটি বিন্দু প্রদত্ত আছে; অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর।

*ইহা সমাধানে উপবৃত্তের ধর্মগুলি সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান প্রয়োজন।

উত্তরমালা

1. (a) $\sqrt{2}$; (b) 1 ; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (d) $(\pm 1, 0)$; (e) $x=\pm 2$; (f) $\sqrt{2}$.

2. (a) 4 ; (b) $2\sqrt{3}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $(\pm 2, 0)$; (e) $x=\pm 8$; (f) 6.

3. (a) 13 ; (b) 12 ; (c) 5/13 ; (d) $(\pm 5, 0)$; (e) $x=\pm 169/5$; (f) 288/13.

4. (a) $2\sqrt{3}$; (b) $2\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $(0, \pm 2)$; (e) $y=\pm 6$; (f) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

5. (a) 17 ; (b) 15 ; (c) 8/17 ; (d) $(\pm 8, 0)$; (e) $x=\pm 289/8$; (f) 450/17.

6. (a) 3 ; (b) $\sqrt{5}$; (c) 2/3 ; (d) $(1, 2), (-3, 2)$; (e) $x=7/2, x=-11/2$; (f) 10/3, কেন্দ্র $=(-1, 2)$.

7. (a) $\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $(-1, 1), (-3, 1)$; (e) $x=1, x=-5$; (f) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, কেন্দ্র $=(-2, 1)$.

8. (a) $\sqrt{2}$; (b) 1 ; (c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$: (d) $(1, 2), (-1, 2)$; (e) $x=2, x=-2$; (f) $\sqrt{2}$, কেন্দ্র (0, 2).

9. লঘুকরণের পর সমীকরণটি হয় $\frac{(x-1)^2}{1/2}+\frac{(y+2)^2}{1/3}=1$, অর্থাৎ কেন্দ্র $(1, -2)$ বিন্দুতে, এখন উত্তর নির্ণয় কর।

10. কেন্দ্র (3, 2), $e=2/3$; নাভিদ্বয় : (1, 2), (5, 2) ; নিয়ামকদ্বয় $2x+11=0, 2x=7$ ইত্যাদি।

11. $p=1$; 2, 1. 12. $a=5\sqrt{2}$. $b=4\sqrt{2}$. 13. $3x^2+5y^2=32$.

14. $3x^2+5y^2=32$. 15. $9x^2+25y^2=25$. 16. $x^2/81+y^2/72=1$.

18. 7 এবং 13 ; $x+4\sqrt{3}y=24\sqrt{3}$ এবং $11x-4\sqrt{3}y=24\sqrt{3}$.

19. (i) $(x-3)^2/9+(y-2)^2/4=1$. (ii) $(x-1)^2/9+(y-1)^2/5=1$. (iii) $(x-1)^2/4+(y-1)^2/2=1$.

20. $x^2/16+y^2/25=1$. 22. $7x^2+16y^2-14x-64y-41=0$.

23. (i) $(6, -4)$; 6 এবং 4 ; $(0, -4)$ এবং $(12, -4)$; $(6+2\sqrt{5}, -4)$ এবং $(6-2\sqrt{5}, -4)$;

$$x=6+\frac{18\sqrt{5}}{5} \text{ এবং } x=6-\frac{18\sqrt{5}}{5} ;\ y=-4 \text{ এবং } x=6.$$

(ii) $(2, -3)$; 4 এবং 3 ; $(6, -3)$ এবং $(-2, -3)$; $(2\pm\sqrt{7}, -3)$;

$$x=2+\frac{16\sqrt{7}}{7} ;\ \text{এবং } x=2-\frac{16\sqrt{7}}{7} ;\ x=2 \text{ এবং } y=-3.$$

24. $30\sqrt{2}$ মিটার। 25. $(x-1)^2/45+(y-2)^2/20=1$.

26. $(x+1)^2/36+(y+1)^2/20=1$. 27. $(x-8)^2/36+(y+3)^2/20=1$.

28. (i) $x^2/4+y^2/9=1$; (ii) $x^2/9+y^2/25=1$.

29. $9x^2+25y^2=225$. 30. $x^2/a^2+y^2/b^2=y/b$.

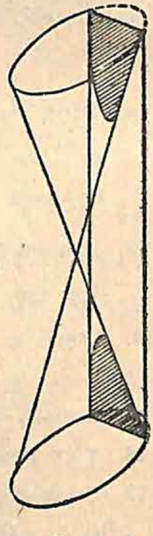
7·5. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

1. সংজ্ঞা। কোন বিন্দু যদি এইরূপে গতিশীল থাকে যে কোন স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির রেখা L হইতে উহার লম্ব দূরত্বের সহিত সর্বদা ধ্রুবক অনুপাত $e(e>1)$ রক্ষা করিয়া চলে, তবে উহার সঞ্চারপথ হইল একটি পরাবৃত্ত। ইহা মনে রাখা প্রয়োজন যে

(*i*) P বিন্দু সর্বদা রেখা L এবং বিন্দু S এর ধারক সমতলে অবস্থিত এবং (*ii*) S বিন্দু L-রেখার উপরে অবস্থিত নহে।

স্থির বিন্দুটিকে পরাবৃত্তটির একটি **নাভি** ও স্থির রেখা L কে উহার **অনুরূপ নিয়ামক** বলে এবং ধ্রুবক অনুপাত $e(e>1)$ কে উহার **উৎকেন্দ্রতা** বলা হয়।

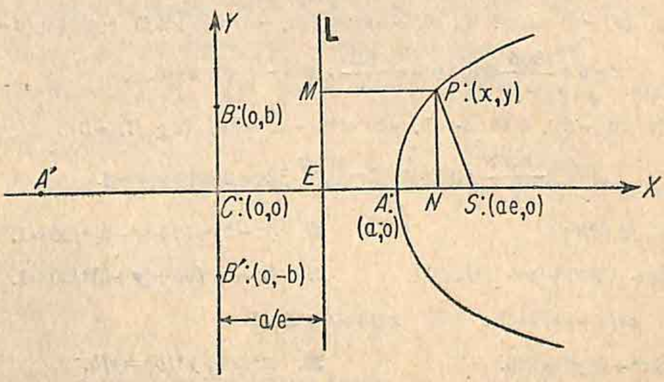
2. পরাবৃত্ত একটি কনিক্ সেক্সন্; অর্থাৎ উহা লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু ও একটি সমতলের এইপ্রকার ছেদের ফলে ছেদ তলে উৎপন্ন হয়, যথা শঙ্কুটি দ্বিগুণ-শঙ্কু (double-cone) হইবে এবং সমতলটি এমনভাবে নত হইবে যে উহা শঙ্কুটির উভয় অংশকে ছেদ করিবে কিন্তু শঙ্কুর শীর্ষের মধ্য দিয়া যাইবে না। (চিত্র 7.15 দ্রষ্টব্য।)



চিত্র 7.15

3. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক্, কোন পরাবৃত্তের নাভি S এবং উহার অনুরূপ নিয়ামক রেখা L; S এর মধ্য দিয়া রেখা L এর উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল (চিত্র 7.16)। $\overrightarrow{SE}$ রেখার উপর এইরূপ দুইটি বিন্দু A এবং A′ লওয়া হইল যেন উহারা রেখাংশ $\overline{SE}$ কে $e:1$ অনুপাতে $(e>1)$ যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে;



চিত্র 7.16

এখানে e হইল পরাবৃত্তটির প্রদত্ত উৎকেন্দ্রতা। তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে, A ও A′ পরাবৃত্তস্থ বিন্দু!

$$(\because \overline{AS}=e.\overline{EA} \text{ এবং } \overline{A'S}=e.\overline{A'E}.)$$

ধরা যাক, $\overline{A'A}$ এর মধ্যবিন্দু C.

এখন নিম্নে প্রদত্ত প্রকারে একপ্রস্ত আয়ত অক্ষ মনোনীত করা হইল, যথা :

C হইবে মূলবিন্দু (0, 0) ; রেখা $\overleftrightarrow{CE}$ x-অক্ষ; C বিন্দু-গামী এবং $\overleftrightarrow{CE}$ রেখার উপর লম্ব $\overleftrightarrow{CY}$ রেখা y-অক্ষ।

এখন নিম্নলিখিত দুইটি গুরুত্বপূর্ণ সম্বন্ধ প্রমাণ করা হইবে, যথা :

$$(i)\ \ \overline{CS}=e.\overline{CA}\ ;\quad (ii)\ \ \overline{CA}=e.\overline{CE}.$$

অঙ্কন অনুসারে,

$$\overline{AS}=e.\overline{EA} \quad \text{এবং} \quad \overline{A'S}=e.\overline{A'E}$$

$\therefore$ বিয়োগ দ্বারা,

$$\overline{A'S}-\overline{AS}=\overline{A'A}$$

$$\therefore\ \overline{A'A}=e.(\overline{A'E}-\overline{EA})=e.(\overline{A'C}+\overline{CE}-\overline{CA}+\overline{CE})$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad 2\overline{CA}=2e.\overline{CE}$$

$\therefore\ \overline{CA}=e.\overline{CE}$ ... ... সম্পর্ক (*ii*) প্রমাণিত হইল।

পুনরায় যোগ করিয়া,

$$\overline{A'S}+\overline{AS}=\overline{A'C}+\overline{CS}+\overline{CS}-\overline{CA}=2\overline{CS}$$

$$\therefore\ \ 2\overline{CS}=\overline{A'S}+\overline{AS}=e.(\overline{A'E}+\overline{EA})=e.\overline{A'A}$$

$\therefore\ \overline{CS}=e.\overline{CA}$ ... ... সম্পর্ক (*i*) প্রমাণিত হইল

ধরা যাক $\overline{CA}=a$; তাহা হইলে (*i*) ও (*ii*) হইতে

$$\overline{CS}=ae \quad \text{এবং} \quad \overline{CE}=a/e.$$

সুতরাং S এর স্থানাঙ্ক $=(ae, 0)$, A র স্থানাঙ্ক $=(a, 0)$

এবং নিয়ামক L এর সমীকরণ হইল $x=a/e$.

ধরা যাক, P : (x, y) পরাবৃত্তটির উপর যে কোন একটি বিন্দু। নিয়ামক L এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}$$

$$\text{বা,}\ \ |\overline{SP}|^2=e^2.|\overline{PM}|^2$$

$$\therefore\ (x-ae)^2+(y-0)^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

$$[\because \overline{MP}=\overline{EN}=\overline{CN}-\overline{CE}=x-a/e]$$

বা, $x^2-2x.ae+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2ex.a+a^2$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$

অর্থাৎ, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1.$

এখন, যেহেতু $e^2>1$, $a^2(e^2-1)$ রাশিটি স্পষ্টত ধনাত্মক ;

সুতরাং ধরা যাইতে পারে, $a^2(e^2-1)=b^2$(যেখানে b^2 একটি ধনসংখ্যা)।

টীকা। এই ক্ষেত্রে $b^2>,=,$ বা $<a^2$ হইতে পারে, এবং ইহা হইবে যখন e^2 যথাক্রমে $>,=,$ বা <2 হইবে।

পূর্বের সম্পর্কটিতে এই মান বসাইলে উহা নিম্নের আকারপ্রাপ্ত হয় :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \textbf{(I)}$$

ইহা পরাবৃত্তটির যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে সত্য ; অপরপক্ষে পরাবৃত্তের উপরে অবস্থিত নয় এমন বিন্দুর ক্ষেত্রে এই সম্পর্কটি সত্য নহে। সুতরাং ইহাই পরাবৃত্তটির সমীকরণ।

টীকা। (*i*) পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে (অর্থাৎ, $y=0$ রেখাকে) দুইটি বিন্দু A : $(a, 0)$ এবং A′ : $(-a, 0)$ এ ছেদ করে। এই বিন্দু দুইটিকে **পরাবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুদ্বয় বলা হয়।**

(*i*) y-অক্ষ (অর্থাৎ, $x=0$ রেখা) বক্ররেখাটিকে আদৌ ছেদ করে না, কারণ যদি (I) এ $x=0$ ধরা হয়, তবে y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যায় না।

y-অক্ষের উপর এইরূপ দুইটি বিন্দু B এবং B′ লওয়া হয় যেন $\overline{OB}=b$ এবং $\overline{OB'}=-b$ হয়, **অর্থাৎ** B এবং B′ এর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে $(0, b)$ এবং $(0, -b)$ হয়। এক্ষেত্রে স্পষ্ট উল্লেখ থাকে যে B **এবং** B′ **পরাবৃত্তস্থ বিন্দু নহে।**

সংজ্ঞা। রেখাংশ $\overline{A'A}$ (শীর্ষদ্বয়ের সংযোজক) কে পরাবৃত্তটির **তির্যক অক্ষ (Transverse axis)** বলা হয়।

রেখাংশ $\overline{B'B}$ (যেখানে B, B′ হইল, উপরের টীকায় বর্ণনামত y-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু) কে পরাবৃত্তটির **অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী অক্ষ (conjugate axis)** বলা হয়।

বিন্দু C কে (চিত্র 7.16) বলা হয় পরাবৃত্তটির কেন্দ্র।

অনেক ক্ষেত্রে সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{A'A}$ কে এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{B'B}$ কে যথাক্রমে তির্যক অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ বলিয়া উল্লেখ করা হইয়া থাকে—প্রসঙ্গ হইতে তখন উহার প্রকৃত অর্থ স্পষ্ট হইবে।

মনে রাখিতে হইবে যে,

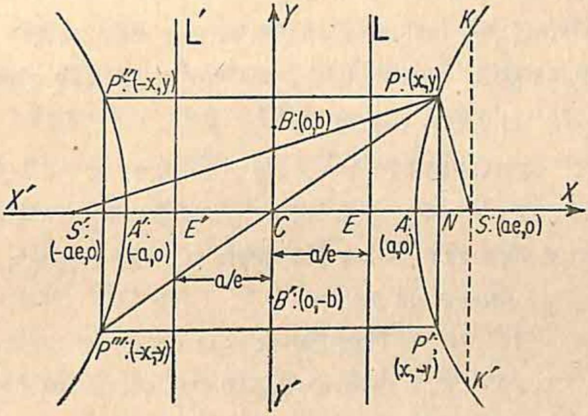
$$\text{তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য} = \overline{A'A} = 2a$$

$$\text{অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য} = \overline{B'B} = 2b.$$

4. পরাবৃত্ত $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ এর আকৃতি

চিত্র 7.17এর প্রতি দৃষ্টি-আকর্ষণ করা যাইতেছে।

(*i*) যদি P : (x, y) পরাবৃত্ত $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ এর উপর যে কোন বিন্দু হয়, তবে ইহা সহজেই যাচাই করিয়া দেখা যায় যে P′ : $(x, -y)$, P″ : $(-x, y)$, P‴ : $(-x, -y)$ বিন্দু তিনটিও বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত।



চিত্র 7.17

সিদ্ধান্ত : বক্ররেখাটি, x-অক্ষ ও y-অক্ষ, এই উভয় অক্ষ সম্পর্কেই প্রতিসম। অধিকন্তু C বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত প্রত্যেক রেখা (অনুবন্ধী অক্ষ বা y-অক্ষ ব্যতীত) বক্ররেখাটিকে C হইতে সমদূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ; অর্থাৎ বক্ররেখাটির C বিন্দু গামী জ্যাগুলি C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। এই C বিন্দুই হইল পরাবৃত্তটির **কেন্দ্র**।

(*ii*) সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া দেখা যায় $x = \pm a$; সুতরাং বক্ররেখা x-অক্ষকে যে দুই বিন্দু A ও A′এ ছেদ করে তাহারা কেন্দ্র হইতে a দূরত্বে অবস্থিত।

(*iii*) সমীকরণে $x=0$ বসাইয়া দেখা যায় $y^2 = -b^2$; সুতরাং ঐ বক্ররেখা y-অক্ষকে আদৌ ছেদ করে না।

(*iv*) $-a$ এবং $+a$র মধ্যবর্তী x এর যে কোন মান y^2 কে ঋণাত্মক করে, সুতরাং ঐ বক্ররেখার কোন অংশ A′ এবং A এর মধ্যে অবস্থিত নহে। কিন্তু লক্ষ্য করা যায় যে x এর a অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন সাংখ্যমান (অর্থাৎ $x > a$ বা $x < -a$) হইতে পারে। সুতরাং বক্ররেখাটি উভয় অভিমুখে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত, এবং উহা দুইটি শাখা (two branches) লইয়া গঠিত।

পূর্ববর্তী বিশ্লেষণ হইতে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে পরাবৃত্ত কোন বদ্ধ বক্ররেখা নহে—ইহা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত দুইটি শাখা লইয়া গঠিত। প্রত্যেক শাখা x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম। উহার C গামী যে কোন জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। y-অক্ষ বরাবর যদি কোন দর্পণ স্থাপন করা হয়, তবে উহার একটি শাখা অপরটির প্রতিবিম্ব হইবে। কিন্তু শীর্ষদ্বয় A′ এবং A এর মধ্যে বক্ররেখাটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

প্রতিসাম্যের ধারণা হইতে একটি সিদ্ধান্ত

বক্ররেখাটির সমীকরণ যে প্রতিসাম্য প্রদর্শন করে তাহা হইতে দেখা যায় যে তির্যক অক্ষের উপর C হইতে S এর দূরত্বের সমান দূরত্বে দ্বিতীয় একটি নাভি S′ অবশ্যই বর্তমান, এবং মূল নিয়ামক L এর সমান্তরাল ও এই দ্বিতীয় নাভির অনুরূপ একটি দ্বিতীয় নিয়ামক L′ ও আছে, যাহা তির্যক অক্ষকে এমন বিন্দু E′এ ছেদ করে যে

$$|\overline{E'C}| = |\overline{CE}| = a/e$$

সুতরাং L′ এর সমীকরণ হইল $x = -a/e$; S′ এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$।

(*v*) পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে যদি পরাক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কিত হয়, এবং যদি এই রেখাংশ বর্ধিত হইয়া বক্ররেখাটিকে পুনরায় P′এ ছেদ করে, তবে

$\overline{PN}$ = P এর কোটি

$\overline{PNP'}$ = P এর দ্বিগুণ-কোটি।

বিশেষক্ষেত্রে, কোন দ্বিগুণ কোটি একটি নাভি দিয়া গমন করিলে উহাকে **নাভি-লম্ব** বলে। উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় এখানেও প্রমাণ করা যায় যে

নাভি-লম্ব দুইটির প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য হইল $2b^2/a$; ইহার প্রমাণ ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনী হিসাবে রাখিয়া দেওয়া হইল।

[**ইঙ্গিত :** ধর $k : (ae, l)$ এবং এই স্থানাঙ্কদ্বয় পরাবৃত্তটির সমীকরণে বসাও।]

(*vi*) বক্ররেখাটির সমীকরণ হইতে পরাবৃত্তের একটি জ্যামিতিক ধর্ম পাওয়া যায়, যথা :

যদি পরাবৃত্তস্থ বিন্দু P এর কোটি $\overline{PN}$ হয়, তবে

$$\frac{\overline{PN}^2}{A'N.AN} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{b^2}{a^2}$$ যাহা P এর সকল অবস্থানে ধ্রুবক।

[উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় এখানেও এই সম্পর্কটি প্রমাণ করা যাইতে পারে। ইহা ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।]

(*vii*) কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (focal distance)

পরাবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে $\overline{S'P}$ এবং $\overline{SP}$ এই নাভি-দূরত্বদ্বয়ের **অন্তর** তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান : কারণ

চিত্র 7.17তে রেখাংশ $\overline{\text{PP}''}$ যেখানে নিয়ামকদ্বয় L এবং L′ কে ছেদ করিয়াছে সেই বিন্দু দুইটিকে যথাক্রমে M এবং M′ ধরিলে পাওয়া যায়,

$$\overline{\text{SP}}=e.\ \overline{\text{PM}}=e\left(x-\frac{a}{e}\right)=ex-a$$

$$\overline{\text{S'P}}=e.\ \overline{\text{PM'}}=e\left(\frac{a}{e}+x\right)=a+ex$$

$\therefore$ $\overline{\text{S'P}}-\overline{\text{SP}}=2a$ যাহা P এর সকল অবস্থানে একটি ধ্রুবক রাশি।

$\overline{\text{SP}}$ এবং $\overline{\text{S'P}}$ এই দূরত্বকে প্রায়ই নাভি-ব্যাসার্ধদ্বয় (focal radii) বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

5. শেষের ধর্মটিকে পরাবৃত্তের সংজ্ঞারূপেও গ্রহণ করা যায়:

পরাবৃত্ত হইল এমন একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ যাহা কোন সমতলে এইরূপে বিচরণ করে যে ঐ সমতলস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু S : $(c, 0)$ এবং S′ : $(-c, 0)$ হইতে উহার দূরত্ব দুইটির অন্তর $2a$ হয়, যেখানে a হইল একটি ধ্রুবক এবং $a<c$. নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটিকে তখন উহার নাভি বলা হয়।

ধরা যাক, P : (x, y) সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু। পূর্ববর্তী সংজ্ঞা অনুসারে

$$\overline{\text{S'P}}-\overline{\text{SP}}=2a$$

বা, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

বা $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

বর্গ করিয়া ও সরল করিয়া পাওয়া যায়,

$$xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ;$$

পুনরায় বর্গ ও সরল করিয়া,

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{(c^2-a^2)}=1.$

যেহেতু $c>a$, সুতরাং $c^2-a^2=$ধনাত্মক$=b^2$ (ধরা যাক্)। তাহা হইলে সমীকরণটির আকার হইল

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহা পরাবৃত্তটির পূর্বে বর্ণিত আদর্শ সমীকরণ, (যদি ধরা যায় $c/a=e$)।

6. পরাবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার

(i) নাভিদ্বয়কে y-অক্ষের উপর যদি লওয়া হয় এবং যদি নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নিরূপণ (পূর্ববর্তী 3নং)

পূর্বের অনুরূপ প্রণালীতে করা যায়, কেবল এক্ষেত্রে x এবং y এর মধ্যে স্থান বিনিময় হইবে। সুতরাং সমীকরণ

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

এমন একটি পরাবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার তির্যক-অক্ষ y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং নাভিদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের একটির উপর অবস্থিত হইলে উহার সমীকরণের সাধারণ আকার হইবে

$$Ax^2-By^2=\pm 1, \ (A, B>0)$$

যেখানে ধনাত্মক চিহ্নটি আসিবে, যখন নাভিদ্বয় x-অক্ষের উপর থাকিবে।

(*ii*) কিন্তু যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে অবস্থিত হয় এবং তির্যক অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে পরাবৃত্তটির সমীকরণের আকার হইবে

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

যদি তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে ঐ সমীকরণ হইবে

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

টীকা। সর্বক্ষেত্রেই লওয়া হইয়াছে যে

তির্যক-অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$

অনুবন্ধী-অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b.$

7. যে পরাবৃত্তের অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান তাহাকে **সমপরাবৃত্ত** (**an equilateral or a rectangular hyperbola**) বলা হয়। তখন সমীকরণটির আকার হয়

$$x^2-y^2=\pm a^2,$$

এবং এইরূপ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $=\sqrt{2}.$

*8 পরাবৃত্তের অসীমপথ (Asymptotes)

প্রদত্ত : পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, যথা

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

* এই অনুচ্ছেদটি বাদ দেওয়া যাইতে পারে, কারণ অসীমপথ বিষয়ক ধারণা উচ্চ মাধ্যমিক পাঠ্যক্রমের অন্তর্ভুক্ত নহে। এখানে অবশ্য অনুচ্ছেদটি সংযোজিত হইল এই কারণে যে আমরা মনে করি, পরাবৃত্তকে উহার অসীমপথের সহিত যুক্তভাবে কল্পনা করিলেই উহার আকৃতি সম্পর্কে সর্বোৎকৃষ্ট ধারণা করা সম্ভব। সাধারণভাবে অসীমপথ নির্ণয়ের জন্য উচ্চতর কলন (Advanced Calculus) বিষয়ে জ্ঞানের প্রয়োজন।

ইহাকে এই প্রকারে লেখা যায়, যেমন : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

বা, $(bx-ay)(bx+ay)=a^2b^2$

যখন এই বক্ররেখা, এবং সরলরেখা,

$$bx-ay=0$$

কে একই স্থানাঙ্ক অক্ষ সম্পর্কে অঙ্কন করা হয়, তখন চিত্রটি হইতে দেখা যায় যে কেন্দ্র হইতে দূরত্ব যতই বৃদ্ধি পায় (**অর্থাৎ**, x যতই বৃদ্ধি পায়), পরাবৃত্তটি ততই সরলরেখাটির নিকটবর্তী হইতে থাকে, কিন্তু উহা কখনই রেখাটি পর্যন্ত পৌঁছায় না।

ধরা যাক্, P : (x_1, y_1) পরাবৃত্তটির উপর প্রথম অথবা তৃতীয় পাদতে অবস্থিত একটি বিন্দু। রেখা $bx-ay=0$ হইতে P এর দূরত্ব হইল

$$d=\left|\frac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

যেহেতু P বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক বক্ররেখার সমীকরণটিকে অবশ্যই সিদ্ধ করিবে,

অর্থাৎ, $b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2$

বা, $bx_1-ay_1=\dfrac{a^2b^2}{bx_1+ay_1}$

$$\therefore\quad d=\left|\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{bx_1+ay_1}\right|$$

ইহা সুস্পষ্ট যে d কখনই শূন্য হইতে পারে না ; P যতই কেন্দ্র হইতে দূরে যায়, যাহার ফলে x_1 এবং y_1 উভয়েই অনির্দিষ্ট ভাবে বৃদ্ধি পায়, তখন $d\to 0$.

অনুরূপে একই ফল পাওয়া যায়, যদি রেখা

$$bx+ay=0$$

লওয়া হয়।

এইরূপ ক্ষেত্রে বলা হইয়া থাকে যে,

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

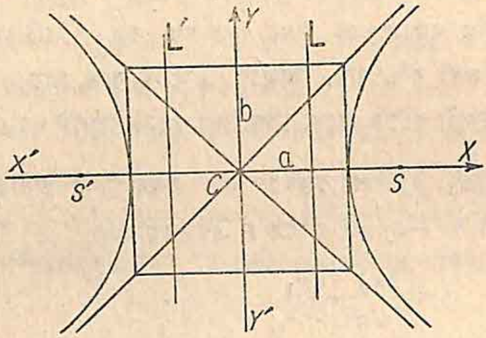
হইল পরাবৃত্ত

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

এর অসীমপথ (Asymptotes).

এ সম্পর্কে একটি কার্যকরী সূত্র হইল এই যে :

পরাবৃত্তের অসীমপথ হইল একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় বরাবর রেখা দুইটি, যে আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র হইল পরাবৃত্তটির কেন্দ্র এবং যাহার বাহুগুলি পরাবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান ও সমান্তরাল (চিত্র 7.18)।



চিত্র 7.18

সমপরাবৃত্তের (rectangular hyperbola) অসীমপথ দুইটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত হয় ; rectangular নামটির যৌক্তিকতা এইখানেই।

উদা 7. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তটির শীর্ষদ্বয় এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর :

$$9x^2-16y^2=144.$$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নের আকারে লেখা হইল, যথা :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

তাহা হইলে, অর্ধ-তির্যক অক্ষ $=a=4$

অর্ধ-অনুবন্ধী অক্ষ $=b=3$

$\because\ b^2=a^2(e^2-1),\ \therefore\ e^2-1=\frac{9}{16},$ বা $e=\frac{5}{4}.$

$ae=4\frac{5}{4}=5\ ;\ \frac{a}{e}=\frac{4}{5/4}=\frac{16}{5}\cdot$

$\therefore$ শীর্ষদ্বয় হইল $(\pm a, 0)=(\pm 4, 0)$

নাভিদ্বয় হইল $(\pm ae, 0)=(\pm 5, 0)$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল $x=\pm a/e=\pm 16/5$

নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=2\frac{b^2}{a}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}.$

উদা. 8. কোন পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় $(0, \pm 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত হইলে এবং অনুবন্ধী অক্ষ 5 হইলে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

এখানে, $b=5/2$, $ae=3$; যেহেতু $b^2=a^2e^2-a^2$,

$$\therefore\ a^2=a^2e^2-b^2=9-\tfrac{25}{4}=\tfrac{11}{4}.$$

যেহেতু নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপরে অবস্থিত, সুতরাং সমীকরণটি হইল

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

বা, $$\frac{y^2}{11/4}-\frac{x^2}{25/4}=1$$

বা, $$100y^2-44x^2=275.$$

উদা. 9. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তের কেন্দ্র এবং তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

$$x^2-2y^2-2x+8y-1=0.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$(x^2-2x+1)-2(y^2-4y+4)=-8+2=-6.$$

বা, $$2(y-2)^2-(x-1)^2=6.$$

বা, $$\frac{(y-2)^2}{3}-\frac{(x-1)^2}{6}=1.$$

$\therefore$ কেন্দ্র $(1, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং y-অক্ষের সমান্তরাল তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য হইল $2\sqrt{3}$.

অনুশীলনী

1. p এর মান নির্ণয় কর, যদি পরাবৃত্ত $px^2-4y^2=1$ বিন্দুদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এর মধ্য দিয়া যায়। তির্যক এবং অনুবন্ধী অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতাও নির্ণয় কর।

2. পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ রেখাদ্বয় $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং ইহার নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য হইল $\dfrac{32\sqrt{2}}{5}$; প্রমাণ কর যে পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা হইল $\frac{1}{5}\sqrt{57}$.

3. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তগুলির উৎকেন্দ্রতা, নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $4x^2-9y^2=36$; (ii) $x^2-2y^2=2$;

(iii) $8x^2-y^2=2$; (iv) $9x^2-16y^2=36$.

4. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে পরাবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া উহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

(*i*) উহার তির্যক অক্ষ 3 এবং অনুবন্ধী অক্ষ 4.

(*ii*) উহার অনুবন্ধী অক্ষ 5 এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 13.

(*iii*) উহার অনুবন্ধী অক্ষ 7 এবং উহা $(3, -2)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

(*iv*) উহার নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$.

5. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 5/4, নাভি $(a, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $4x-3y=a$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং অপর নিয়ামকের সমীকরণও নির্ণয় কর।

6. কোন পরাবৃত্তের শীর্ষ উহার কেন্দ্র এবং নাভির অন্তর্বর্তী দূরত্বকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ; তির্যক অক্ষের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য প্রদত্ত আছে। পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং তির্যক-অক্ষ y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত ; পরাবৃত্তটি $(4, 6)$ এবং $(-1, -3)$ বিন্দুগামী হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. একটি পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত ; যদি উহার নাভি-লম্ব 18 হয় এবং নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 12 হয়, তবে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

9. নাভিদ্বয় $(0, \pm 3)$ বিন্দুতে এবং অনুবন্ধী অক্ষ 5 হইলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. যদি কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও তির্যক-অক্ষ x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয় এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ হয় ও নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য 6 হয়, তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. একটি বিন্দু এইরূপে বিচরণ করিতেছে যে $4x-3y+11=0$ এবং $4x+3y+5=0$ রেখাদ্বয় হইতে উহার সাংখ্য-দূরত্ব দুইটির গুণফল 144/25 হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. একটি বিন্দু (x, y) এইভাবে গতিশীল যে $(0, 4)$ হইতে উহার দূরত্ব, $4y-9=0$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের 4/3 ; উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. (*a*) কেন্দ্র, (*b*) শীর্ষদ্বয় (*c*) নাভিদ্বয়, (*d*) অসীমপথ ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং পরাবৃত্তটির একটি স্থূল চিত্র (rough diagram) অঙ্কন কর, যখন উহার সমীকরণ হইবে

(*i*) $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.

(ii) $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0.$

(iii) $3x^2-y^2+12x+2y-1=0.$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণও নির্ণয় কর।

14. দেখাও যে পরাবৃত্ত $9x^2-16y^2=144$ এর উপরিস্থিত বিন্দু $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ হইতে নাভিদ্বয়ের দূরত্বের অন্তর তির্যক-অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

নিম্নলিখিত সংজ্ঞাটি স্মরণ রাখিবে :

দুইটি পরাবৃত্তকে পরস্পর অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী (conjugate) বলা হয়, যদি একটির তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ অন্যটির যথাক্রমে অনুবন্ধী ও তির্যক অক্ষের সমান হয়। যদি পরাবৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকারে লেখা হয়, তবে উহার অনুবন্ধী-পরাবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়, প্রদত্ত সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া।

যেমন, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ এবং $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ হইল পরস্পর অনুবন্ধী-পরাবৃত্ত।

15. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তটির সমীকরণটি লিখ। প্রত্যেকটির অসীমপথের সমীকরণও লিখ এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

16. যদি e এবং e' কোন পরাবৃত্তের ও উহার অনুবন্ধী-পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

17. যে গতিশীল বিন্দুর $(-6, -4)$ এবং $(2, -4)$ হইতে দূরত্বদ্বয়ের অন্তর সর্বদা 6, তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

18. পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যদি উহার কেন্দ্র $(-1, 3)$, নাভি $(2, 3)$ এবং উৎকেন্দ্রতা 3/2 হয়।

19. সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার নাভিদ্বয় $(-3, -1)$ এবং $(2, -1)$ ও তির্যক-অক্ষ একক দৈর্ঘ্যের।

20. একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় $(6, 2)$, $(-4, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রতা 5/4 ; উহার সমীকরণ এবং উহার অসীমপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তটির একটি স্থূল চিত্র অঙ্কন কর।

21. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 2, নাভি $(1, 2)$ এবং অনুরূপ নিয়ামক $x+2=0$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. কোন পরাবৃত্তের একটি নাভি (2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত, অনুরূপ নিয়ামকটির সমীকরণ $x+2y=1$ এবং উহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{3}$; পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $p=1$; 2 এবং 1 ; $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 3. (i) $\frac{\sqrt{13}}{3}$; 8/3 ; $(\pm\sqrt{13}, 0)$: $x=\pm\frac{9\sqrt{13}}{13}$.

(ii) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$; $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(iii) 3 ; 8 ; $(\pm 3/2, 0)$; $x=\pm 1/6$. (iv) 5/4 ; 9/4 ; $(\pm 5/2, 0)$, $x=\pm 8/5$.

4. (i) $16x^2-9y^2=36$; (ii) $25x^2-144y^2=900$;

(iii) $65x^2-36y^2=441$; (iv) $x^2-y^2=32$.

5. $7y^2+24xy-24ax-6ay+15a^2=0$; $(-a/3, a)$: $12x-9y+29a=0$.

6. $3x^2-y^2=3a^2$. 7. $5y^2-9x^2=36$.

8. $3x^2-y^2=27$, $3y^2-x^2=27$. 9. $100y^2-44x^2=275$.

10. $3x^2-4y^2=48$. 11. $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

12. $y^2/9-x^2/7=1$. 13. (i) $(1,-2)$; $(-3,-2)$, $(5,-2)$;
$(-4,-2)$, $(6,-2)$; $y+2=\pm\frac{3}{4}(x-1)$; নিয়ামকদ্বয় : $x=21/5$, $x=-11/5$.
(ii) $(2,-1)$; $(7,-1)$; $(-3,-1)$; $(6,-1)$, $(-2,-1)$; $y+1=\pm\frac{3}{4}(x-2)$;
নিয়ামকদ্বয় : $x=\frac{26}{5}$, $x=-\frac{6}{5}$.
(iii) $(-2, 1)$; $(0,0)$, $(-4, 1)$; $(2, 1)$, $(-6, 1)$: $y-1=\pm\sqrt{3}(x+2)$;
নিয়ামকদ্বয় : $x+2=0$, $x+3=0$.

15. $9y^2-4x^2=36$; $y=\pm(2/3)x$ (উভয় ক্ষেত্রে) ;
$(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$ $(0, \sqrt{13})$ এবং $(0, -\sqrt{13})$.

17. $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{7}=1$. 18. $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$.

19. $6(2x+1)^2-(y+1)^2=6$. 20. $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$; $3x+4y-11=0$ এবং $3x-4y+5=0$.

21. $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$. 22. $2x^2-7y^2-12xy-14x-18y+62=0$.

উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের সমীকরণ
(সংক্ষিপ্তসার)

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
নাভি-নিয়ামক সংজ্ঞা	প্রদত্ত একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) $\overline{SP} : \overline{PM} =$ ধ্রুবক e $(0<e<1)$	প্রদত্ত একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) $\overline{SP} : \overline{PM} =$ ধ্রুবক $e>1$.
কনিক্ সেক্সন্	শঙ্কু-উৎপাদক একটি রেখার (generator) সহিত কোন কোণে নত সমতল কর্তৃক লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর একটি মাত্র অংশকে (one nappe) ছেদের ফলে ছেদতলে উৎপন্ন হয়। উৎকেন্দ্রতা +(ve), কিন্তু <1	শঙ্কুর শীর্ষগামী নহে, অথচ লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর উভয় অংশকে (both nappes) ছেদ করে এইরূপভাবে আনত একটি সমতল কর্তৃক উক্ত শঙ্কুর ছেদের ফলে ছেদতলে উৎপন্ন হয়। উৎকেন্দ্রতা >1
সাধারণ সমীকরণ ঃ প্রদত্ত : নাভি (h, k) এবং নিয়ামক: $ax+by+c=0$	$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ এখানে $e^2<1$	$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2.\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ এখানে $e^2>1$
কতিপয় সংজ্ঞা	S এর মধ্য দিয়া $\overline{SE} \perp$, L অঙ্কন কর ; A, A' এইরূপে লও যেন উহারা $\overline{SE}$কে অন্তঃস্থ ও বহিস্থঃভাবে $e : 1$ $(0<e<1)$ অনুপাতে বিভক্ত করে। A, A' শীর্ষদ্বয় $\overline{A'A}$ পরাক্ষ $C = \overline{A'A}$ এর মধ্যবিন্দু = কেন্দ্র	এখানে $\overline{A'A}$ কে **তির্যক অক্ষ** বলা হয়, অন্যান্যগুলি উপবৃত্তের অনুরূপ

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
মৌলিক সম্বন্ধ	$\overline{CS}=e.\overline{CA}$; $\overline{CA}=e.\overline{CE}$; $\overline{CS}.\overline{CE}=\overline{CA}^2$	উপবৃত্তের অনুরূপ, কেবল একমাত্র পার্থক্য হইল যে এখানে $e>1$
প্রধান অক্ষদ্বয় সম্পর্কে আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a^2>b^2)$, যেখানে $b^2=a^2(1-e^2)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, যেখানে $b^2=a^2(e^2-1)$
মূলবিন্দু	কেন্দ্র C	কেন্দ্র C
x-অক্ষ	পরাক্ষ $\overleftrightarrow{A'A}$	তির্যক অক্ষ $\overleftrightarrow{A'A}$
অপর অক্ষ	$\overleftrightarrow{A'A}$ এর উপর লম্ব এবং C বিন্দুগামী রেখা y-অক্ষ । দুইটি বিন্দু B ও B′ এইরূপে গৃহীত হয় যে $B=(0,b)$ এবং $B'=(0,-b)$ $\overline{B'B}$ = উপাক্ষ	উপবৃত্তের অনুরূপ অঙ্কন $\overline{B'B}$ = অনুবন্ধী অক্ষ
অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য	পরাক্ষ $=2a$ উপাক্ষ $=2b$	তির্যক অক্ষ $=2a$ অনুবন্ধী অক্ষ $=2b$
উৎকেন্দ্রতা e নির্ণয়	$b^2=a^2(1-e^2)$ এখানে $b^2<a^2$	$b^2=a^2(e^2-1)$ এখানে b^2 যে a^2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে এমন কোন কথা নাই ।

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	S : $(ae, 0)$ S$'$: $(-ae, 0)$	S : $(ae, 0)$ S$'$: $(-ae, 0)$
নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$x = \pm ae$
নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং সমীকরণ	দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a$ $x = \pm ae$	দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a$ $x = \pm ae$
প্রতিসাম্য	উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্র সম্পর্কে	উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্র সম্পর্কে
যে অঞ্চলে বক্ররেখাটির কোন বিন্দু বিদ্যমান নহে	$x > a$ এবং $x < -a$	$-a < x < a$
বক্ররেখাটির প্রকৃতি	সীমাবদ্ধ এবং বদ্ধ বক্ররেখা	দুইটি শাখা—অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত
অসীমপথ	নাই	দুইটি অসীমপথ : $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$
দুইটি বিশেষ ধর্ম	(i) $\frac{\overline{PN}^2}{A'N.\overline{AN}} =$ ধ্রুবক $= \frac{b^2}{a^2}$ (ii) $\overline{SP} + \overline{S'P} =$ ধ্রুবক $= 2a$	(i) $\frac{\overline{PN}^2}{A'N.\overline{AN}} = \frac{b^2}{a^2}$ (ii) $\overline{S'P} - \overline{SP} =$ ধ্রুবক $= 2a$

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
অন্যান্য আকার	(i) $\frac{y^2}{A^2}+\frac{x^2}{B^2}=1\ (A^2>B^2)$ y-অক্ষ পরাক্ষ	(i) $\frac{y^2}{A^2}-\frac{x^2}{B^2}=1$ y-অক্ষ তির্যক অক্ষ
	(ii) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ (a^2>b^2)$ কেন্দ্র (h, k) ; পরাক্ষ—x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উপাক্ষ – y-অক্ষের সমান্তরাল কার্যকরী নিয়ম : ধর $x-h=X,\ y-k=Y$ উপবৃত্ত $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ সম্পর্কে আলোচনা কর। অবশেষে x এবং y এর মাধ্যমে উত্তরকে প্রকাশ কর, যেখানে $x=h+X,\ y=k+Y.$	(ii) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ কেন্দ্র (h, k), তির্যক অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং অনুবন্ধী অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল কার্যকরী নিয়ম : ধর $x-h=X,\ y-k=Y$ $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ সম্পর্কে আলোচনা কর। অবশেষে x এবং y এর মাধ্যমে ফলগুলি (উত্তর) প্রকাশ কর, যেখানে $x=h+X,\ y=k+Y.$
	(iii) $\frac{(x+h)^2}{B^2}+\frac{(y+k)^2}{A^2}=1\ (A^2>B^2)$ সমীকরণটির সরলতর আকার $\frac{X^2}{B^2}+\frac{Y^2}{A^2}=1\ (A^2>B^2)$ পরাক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল এখন; উপরের (ii) এর ন্যায়	(iii) $\frac{(y+k)^2}{A^2}-\frac{(x+h)^2}{B^2}=1$ সরলতর আকারে $\frac{Y^2}{A^2}-\frac{X^2}{B^2}=1$ তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল

8

স্পর্শক এবং অভিলম্ব
(TANGENTS AND NORMALS)

8.1. সূচনা

সরলরেখার প্রবণতা বিষয়ক ধারণার সহিত ছাত্রছাত্রীদের ইতিপূর্বে পরিচয় হইয়াছে। সরলরেখার যে কোন অংশের পক্ষে ঐ প্রবণতা ধ্রুবক। কিন্তু বক্র রেখার প্রবণতা রেখাটির বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন। এই রেখার কোন বিন্দু Pতে একটি স্পর্শক রেখা অঙ্কিত হইলে স্পর্শক রেখাটির প্রবণতাই ঐ **বক্র রেখার P বিন্দুতে প্রবণতা**। সুতরাং মুখ্য প্রশ্ন হইল এই যে কোন বক্ররেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সংজ্ঞা কি হইবে। বর্তমান অধ্যায়ে বক্র রেখার কোন বিন্দুতে ঐ স্পর্শক রেখার **সঠিক** সংজ্ঞা নিরূপণ করা হইবে এবং পরে উহার সমীকরণ নির্ণয় করা হইবে। স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুটিতে অঙ্কিত লম্বরেখাটি অভিলম্ব বলিয়া পরিচিত। এই অভিলম্বের সমীকরণও এখানে নির্ণয় করা হইবে।

8.2. স্পর্শক ও অভিলম্ব—সংজ্ঞা

1. ধরা যাক্, প্রদত্ত কোন বক্ররেখা C এর যে কোন অনির্দিষ্ট একটি বিন্দু P। বক্র রেখাটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু Q লওয়া হইল এবং ছেদক (secant) $\overleftrightarrow{PQ}$ অঙ্কিত হইল (চিত্র 8.1 দ্রষ্টব্য)। ধরা যাক্, P স্থির রহিল এবং Q বক্র রেখা বরাবর P অভিমুখে অগ্রসর হইতে লাগিল। ইহা সম্ভব যে Q যখন বক্র রেখা বরাবর P অভিমুখে অগ্রসর হইতে হইতে P এর দিকে ঝুঁকিবে (as Q tends to P), ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ তখন একটি নির্দিষ্ট সীমাস্থ রেখা $\overleftrightarrow{PT}$র নিকট হইতে নিকটতর হইতে থাকিবে ($\overleftrightarrow{PQ}$ may approach a fixed limiting line $\overleftrightarrow{PT}$)। এইরূপ অবস্থায় বলা হইয়া থাকে যে ঐ সীমাস্থ রেখা $\overleftrightarrow{PT}$ হইল বক্র রেখাটির P বিন্দুতে স্পর্শক। P বিন্দুতে এই স্পর্শক রেখার প্রবণতাকেই **বক্র রেখাটির P বিন্দুতে প্রবণতা** বলা হয়।

2. কোন প্রদত্ত ক্ষেত্রে ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতাসূচক রাশিটি নির্ণয় করা হয়। ইহার সীমাস্থ মান (যদি ইহা বিদ্যমান হয়) স্পর্শক রেখা $\overleftrightarrow{PT}$র প্রবণতা নির্ণয় করিবে।

এখন সরলরেখার বিন্দু-প্রবণতা আকারের সমীকরণের সাহায্যে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

3. $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক রেখার উপর লম্ব এবং P বিন্দুগামী সরলরেখা $\overleftrightarrow{PN}$কে **বক্র রেখাটির P বিন্দুতে অভিলম্ব** বলা হয়। যদি স্পর্শক রেখার প্রবণতা m হয়, তবে অভিলম্ব রেখাটির প্রবণতা হইবে $(-1/m)$; পুনরায় সরলরেখার সমীকরণের বিন্দু-প্রবণতা আকারের সাহায্যে P বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

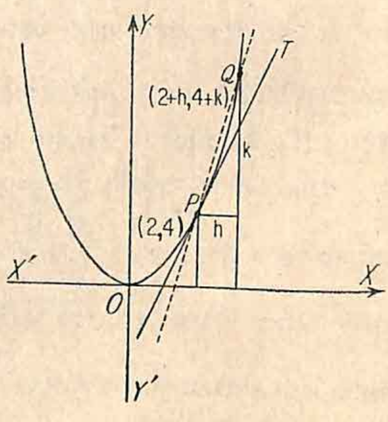
4. **স্পর্শক** $\overleftrightarrow{PT}$ সম্পর্কে P বিন্দুকে বলা হয় **স্পর্শবিন্দু (point of contact)**, কিন্তু অভিলম্ব $\overleftrightarrow{PN}$ সম্পর্কে ঐ একই বিন্দু Pকে অভিলম্বটির **পাদবিন্দু (the foot of the normal)** বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

দৃষ্টান্ত ঃ বক্র রেখা $y=x^2$ এর $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

ছাত্রছাত্রীদের নিশ্চয়ই স্মরণ আছে যে $y=x^2$ সমীকরণ একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যে অধিবৃত্ত ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত এবং উহার নাভিলম্ব$=1$. কিন্তু বক্ররেখাটির প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ের পক্ষে এই তথ্য জানা **একান্ত আবশ্যক** নহে।

ধরা যাক প্রদত্ত বিন্দু P : $(2, 4)$

দ্বিতীয় একটি বিন্দু Q : $(2+h, 4+k)$ লওয়া হইল।



চিত্র 8.1

তাহা হইলে, $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকের প্রবণতা

$$=\frac{4+k-4}{2+h-2}=\frac{k}{h}\ (h\neq 0)$$

$\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শকের প্রবণতা

$=\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit), যখন $Q\to P$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{k}{h}\quad (\because \text{ যখন } Q\to P, \text{ তখন } h\to 0, k\to 0)$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+h)\quad (\because Q \text{ বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত, } \therefore 4+k=(2+h)^2, \text{ বা } k/h=4+h)$$

$=4$

টীকা : $\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{k}{h}$ নির্ণয় কালে দেখা যায় যে ভগ্নাংশটি $\frac{0}{0}$ আকারের ; কিন্তু এই অনির্ধারিত (indeterminate) আকার পরিহার করিয়া ভগ্নাংশটিকে এইরূপ পরিবর্তিত আকারে লইয়া আসা হইয়াছে যেন উহার সীমাস্থ মান নির্ণয় করা যায়। $(2+h,\ 4+k)$ বিন্দু যে বক্র রেখাটির উপর অবস্থিত এই তথ্যের সাহায্য লইয়া এবং $h\to 0$ এর অপরিহার্য অর্থ যে $h=0$ নহে এই মত অনুসরণে ঐরূপ পরিবর্তন করা হইয়াছে।

যেহেতু স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$ (2, 4) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা 4,

সুতরাং উহার সমীকরণ হইল

$$y-4=4(x-2)$$

বা, $y=4x-4$

আবার, $\because$ স্পর্শকটির প্রবণতা $=4$

$\therefore$ অভিলম্বটির প্রবণতা $=-1/4$.

$\therefore$ (2, 4) বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y-4=-\tfrac{1}{4}(x-2),$$

বা, $4y+x=18$.

8·3. বিভিন্ন কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ

A. বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$, প্রদত্ত বিন্দু P : (x_1, y_1).

স্পর্শকের সমীকরণ :

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক্, Q : $(x_2,\ y_2)$ হইল বৃত্তটির দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

তাহা হইলে $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকের প্রবণতা

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_2\neq x_1)$$

[এখন 8·2 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত টীকা দ্রষ্টব্য]

কিন্তু P : (x_1, y_1) এবং Q : (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি বৃত্তস্থ,

$\therefore\ x_1^2+y_1^2=a^2$ এবং $x_2^2+y_2^2=a^2$

বা, $y_2^2-y_1^2=-(x_2^2-x_1^2)$

বা, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$.

$\therefore$ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$র প্রবণতা

$$=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}} \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\left(-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}\right)=-\frac{2x_1}{2y_1}=-\frac{x_1}{y_1}$$

$\because$ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$ বিন্দু P : (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা $(-x_1/y_1,)$

$\therefore$ উহার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1+xx_1=y_1^2+x_1^2=a^2$

($\because$ P : (x_1, y_1) বৃত্তস্থ বিন্দু, $\therefore$ $x_1^2+y_1^2=a^2$)

$\therefore$ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$xx_1+yy_1=a^2.$$

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা$=-\frac{x_1}{y^1}.$

$\therefore$ P বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা$=\frac{y_1}{x_1}.$

$\therefore$ P : (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1).$$

বা, $\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{x-x_1}{x_1}.$

বা, $\frac{y}{y_1}-\frac{x}{x_1}=-2.$

বা, $\frac{x}{x_1}-\frac{y}{y_1}=2.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। কলন বিষয়ের সহিত পরিচিত ছাত্রছাত্রীরা অন্তরকলন (Differential Calculus)এর নিম্নলিখিত গুরুত্বপূর্ণ প্রতিপাদ্যের সাহায্যে P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা সরাসরি নির্ণয় করিতে পারে :

বক্র রেখা $y=f(x)$ এর কোন বিন্দু (x_1, y_1)তে উহার প্রবণতা হইল, (x_1, y_1) বিন্দুতে x সম্পর্কে y এর 'ডেরিভেটিভ' বা লব্ধ মান (derivative of y w.r. t. x), যদি ঐ বিন্দুতে এই লব্ধমান বিদ্যমান হয় (provided that the derivative exists at that point)।

বর্তমান ক্ষেত্রে,

$$x^2+y^2=a^2$$

$\therefore\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0.$ (x সম্পর্কে প্রতিটি রাশির লব্ধমান লইয়া)

$\therefore$ যে কোন বিন্দু (x, y)তে, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}.$

$\therefore$ বক্র রেখাটির (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রবণতা $=-\dfrac{x_1}{y_1}.$

এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে ইহাই হইল স্পর্শক রেখাটির প্রবণতা।

এখন অবশিষ্টাংশ **প্রথম পদ্ধতির** অনুরূপ।

সাধারণভাবে, যে কোন বক্র রেখা $y=f(x)$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}(x-x_1).$$

তৃতীয় পদ্ধতি। কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি প্রয়োগযোগ্য—অন্য কোন কনিক-এর ক্ষেত্রে নহে।

মৌলিক জ্যামিতিতে ইহা প্রমাণিত হইয়াছে যে বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

বৃত্তের এই ধর্মের সাহায্যে উহার প্রদত্ত কোন বিন্দু, ধরা যাক্, (x_1, y_1) তে উহার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়, যথা :

(x_1, y_1) বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের প্রবণতা $=\dfrac{y_1-0}{x_1-0}.$

[$\because$ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত।]

$\therefore$ ব্যাসার্ধটির উপর লম্বরেখার প্রবণতা $=-\dfrac{x_1}{y_1}.$

এবং ইহাই হইল (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার প্রবণতা।

তাহা হইলে (প্রথম পদ্ধতির ন্যায়) স্পর্শক রেখাটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}\left(x-x_1\right)$$

বা, $\quad yy_1+xx_1=x_1{}^2+y_1{}^2=a^2.$

টীকা। (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ নির্ণয়ের সময় পরোক্ষে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে $y_1 \neq 0$, কারণ তাহা না হইলে স্পর্শক রেখাটির প্রবণতা নির্ণয়ের জন্য x_1 কে y_1 দ্বারা ভাগ করা যাইত না।

কিন্তু ইহা অবশ্যই স্মরণ রাখিতে হইবে যে $xx_1+yy_1=a^2$ এই চূড়ান্ত সূত্রটি সর্বদাই সত্য, এমন কি $y_1=0$ হইলেও। কারণ, যদি $y_1=0$ এবং $x_1=a$ হয়, তাহা হইলে ঐ সূত্র হইতে $x=a$ পাওয়া যায় এবং ইহা হইল $(a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ। অনুরূপে, যখন $y_1=0$ এবং $x_1=-a$, তখন সূত্রটি হইতে পাওয়া যায় $x=-a$ এবং ইহা $(-a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ। লক্ষ্য কর যে যখন $y_1=0$, তখন $x_1=$ হয় a অথবা $-a$.

B. **বৃত্ত : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, প্রদত্ত বিন্দু $P:(x_1, y_1)$ স্পর্শকের সমীকরণ**

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক্, $Q:(x_2, y_2)$ বৃত্তটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

$\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকের প্রবণতা $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. $(x_2 \neq x_1)$

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

$=\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান, যখন বক্র রেখা বরাবর $Q \to P$.

$$=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}} \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\left(-\frac{x_2+x_1+2g}{y_2+y_1+2f}\right)=-\frac{x_1+g}{y_1+f}.$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** যেহেতু $P:(x_1, y_1)$ এবং $Q:(x_2, y_2)$ বৃত্তস্থ বিন্দু, সুতরাং $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$

এবং $x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$.

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া,

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0$$

বা, $(y_2-y_1)(y_1+y_2+2f)=-(x_2-x_1)(x_1+x_2+2g)$

বা, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}$; 167 পৃষ্ঠার টীকাটি দ্রষ্টব্য]

এখন $P:(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2+yf-y_1f=-xx_1-gx+x_1^2+gx_1$

বা, $xx_1+yy_1+fy-fy_1+gx-gx_1=x_1^2+y_1^2$
$$=-2gx_1-2fy_1-c$$

[যেহেতু $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$,
সুতরাং ইহা লেখা যায় যে, $x_1^2+y_1^2=-2gx_1-2fy_1-c$]

সুতরাং সমীকরণটি অবশেষে হইল :

$$xx_1+yy_1+f(y+y_1)+g(x+x_1)+c=0$$

টীকা। যে কোন কনিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণের 'প্যাটার্ন' বা ছাঁচ (pattern) নিম্নের নিয়মগুলি অনুসরণ করে:

(i) কনিকের সমীকরণে x^2 এবং y^2-বিশিষ্ট পদগুলিতে x^2 এবং y^2 এর পরিবর্তে যথাক্রমে xx_1 এবং yy_1 লিখিতে হইবে।

(ii) x এবং y বিশিষ্ট পদগুলির ক্ষেত্রে $2x$ এবং $2y$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x+x_1$ এবং $y+y_1$ লিখিতে হইবে।

(iii) যদি কনিকের সমীকরণে xy বিশিষ্ট পদ থাকে, তবে $2xy$ এর পরিবর্তে x_1y+xy_1 লিখিতে হইবে।

(iv) ধ্রুবক পদটিকে অপরিবর্তিত আকারে রাখিয়া দিতে হইবে।

এই নিয়মগুলির প্রয়োগ দ্বারা ছাত্রছাত্রীরা নিম্নের প্রদত্ত ফলগুলি যাচাই করিয়া দেখিতে পারে :

কনিকের সমীকরণ	**(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ**
$y^2=4ax$	$yy_1=2a(x+x_1)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$
$xy=c^2$	$xy_1+x_1y=2c^2$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হইতে উভয়পক্ষকে x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েট্' (differentiating with respect to x) করিয়া পাওয়া যায়,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0,$$

বা, যে কোন বিন্দু (x, y)তে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+g}{y+f}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $=(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

এখন শেষাংশ প্রথম পদ্ধতির অনুরূপ।

তৃতীয় পদ্ধতি। যেহেতু

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c,$

সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $(-g, -f)$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের প্রবণতা $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে এই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব স্পর্শক রেখার প্রবণতা

$$=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

এখন অবশিষ্ট অংশ **প্রথম** পদ্ধতির অনুরূপ।

[এই পদ্ধতি কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, অন্য কোন কনিকের ক্ষেত্রে নহে ; কিন্তু প্রথম অথবা দ্বিতীয় পদ্ধতি যে কোন বক্র রেখার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।]

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$$

বা, $$\frac{y-y_1}{y_1+f}=\frac{x-x_1}{x_1+g}.$$

C. অধিবৃত্ত : $y^2=4ax$, প্রদত্ত বিন্দু P : (x_1, y_1)

স্পর্শকের সমীকরণ

ধরা যাক, অধিবৃত্তের দ্বিতীয় একটি বিন্দু Q(x_2, y_2).

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

= ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit) যখন বক্র রেখা বরাবর Q→P.

$$=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{y_2\to y_1}\frac{4a}{y_2+y_1}=\frac{2a}{y_1}$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** যেহেতু P : (x_1, y_1) এবং Q : (x_2, y_2) অধিবৃত্তস্থ বিন্দু,

সুতরাং $y_1{}^2 = 4ax_1$ এবং $y_2{}^2 = 4ax_2$

বিয়োগ করিয়া, $y_2{}^2 - y_1{}^2 = 4a(x_2 - x_1)$

$\therefore \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4a}{y_2 + y_1}$; 167 পাতার টীকাটি দ্রষ্টব্য]

$\therefore$ P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1{}^2 = 2ax - 2ax_1$

বা, $yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1{}^2$

$= 2ax - 2ax_1 + 4ax_1 \quad (\because y_1{}^2 = 4ax_1)$

অর্থাৎ, $\boldsymbol{yy_1 = 2a(x + x_1)}$.

টীকা। Calculus (কলন) এর সাহায্যে (x_1, y_1) বিন্দুতে এইভাবে স্পর্শকের প্রবণতা পাওয়া যায়। যথা :

$$\because \; y^2 = 4ax.$$

$\therefore$ x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েশন' দ্বারা (on differentiation w.r.t. x) পাওয়া যায়

যে কোন (x, y) বিন্দুতে, $2y\dfrac{dy}{dx} = 4a$, বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}} = \dfrac{2a}{y_1}$

এখন উপরে প্রদত্ত উপায়ে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= \dfrac{2a}{y_1}$,

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $= -\dfrac{y_1}{2a}$

এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)}$$

সমীকরণটির বিকল্প রূপ :

ধরা যাক্, $-\frac{y_1}{2a}=m$; তাহা হইলে $y_1=-2am.$

যেহেতু, $y_1{}^2=4ax_1$, সুতরাং $x_1=\frac{y_1{}^2}{4a}=\frac{4a^2m^2}{4a}=am^2$

সুতরাং, যদি অভিলম্বটির প্রবণতা m ধরা হয়, তাহা হইলে উহার পাদবিন্দু হইল

$$(am^2,\ -2am).$$

এবং এই ক্ষেত্রে অভিলম্বের সমীকরণটির আকার হইবে

$$y+2am=m(x-am^2)$$

বা, $\boldsymbol{y=mx-2am-am^3}$

D. **উপবৃত্ত : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1)**

ধরা যাক্ Q : (x_2, y_2) উপবৃত্তটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

= ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit), যখন বক্র রেখা বরাবর Q→P.

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\left(-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** P : (x_1,y_1) এবং Q : (x_2,y_2) উপবৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \text{ এবং } \frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_2{}^2}{b^2}=1.$$

বিয়োগ দ্বারা, $\frac{1}{b^2}(y_2{}^2-y_1{}^2)=-\frac{1}{a^2}(x_2{}^2-x_1{}^2)$

$\therefore\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}, \frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$; 167 পাতার টীকাটি দ্রষ্টব্য].

বিকল্প পদ্ধতি : Calculus এর প্রয়োগ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ হইতে}$$

x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েট্' করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\,\frac{dy}{dx}=0$$

বা, যে কোন বিন্দু (x_1, y_1)তে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1},$

যেহেতু, (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1},$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2}(xx_1 - x_1^2)$

বা, $\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{xx_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$

বা, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ [$\because$ (x_1, y_1) উপবৃত্তস্থ একটি বিন্দু]

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $= \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

অতএব (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

বা, $\frac{y - y_1}{y/b^2} = \frac{x - x_1}{x_1/a^2}$

E. **পরাবৃত্ত :** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; **প্রদত্ত বিন্দু** P : (x_1, y_1)

স্পর্শকের সমীকরণ

হুবহু উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় যুক্তি অনুসরণ করিয়া ছাত্রছাত্রীরা নিজেরাই প্রমাণ করিতে পারিবে যে

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

অভিলম্বের সমীকরণ

P : (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইবে

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

বা, $\frac{y - y_1}{y_1/b^2} + \frac{x - x_1}{x_1/a^2} = 0.$

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির প্রত্যেকটির প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর : [তিনটি পদ্ধতিই প্রয়োগ কর]

(i) $x^2+y^2=25$, (3, 4) বিন্দুতে ;

(ii) $x^2+y^2-6x+8y-25=0$, (−2, 1) বিন্দুতে ;

(iii) $2x^2+2y^2-3x+5y-2=0$, (2, 0) বিন্দুতে ;

(iv) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, (3, −3) বিন্দুতে।

2. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ উপবৃত্তের (−3, 2) বিন্দুতে ;

(ii) $x^2=4y$ অধিবৃত্তের (2, 1) বিন্দুতে ;

(iii) $9x^2-4y^2=36$ পরাবৃত্তের $\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ বিন্দুতে ;

(iv) $y^2=4(x-1)$ অধিবৃত্তের (5, 4) বিন্দুতে ;

(v) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ উপবৃত্তের (2, −2) বিন্দুতে ;

(vi) $3x^2+4y^2-6x+8y-45=0$ উপবৃত্তের (−3, −2) বিন্দুতে ;

(vii) $x^2-2xy-y^2-2x+4y+4=0$ পরাবৃত্তের (2, −2) বিন্দুতে।

3. (−2, −1) বিন্দুগামী যে রেখাগুলি $5x^2+y^2=5$ উপবৃত্তের স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** ধরা যাক্, $P(x_1, y_1)$ স্পর্শবিন্দু।

(x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$5xx_1+yy_1=5.$$

(−2, −1) বিন্দু এই স্পর্শকের উপর অবস্থিত হইবে, যদি

$$5(-2)x_1+(-1)y_1=5 \text{ হয়}$$

অর্থাৎ, যদি $-10x_1-y_1=5$ হয় … … … (i)

(x_1, y_1) বিন্দুটি উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত ; সুতরাং

$$5x_1^2+y_1^2=5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

(i) ও-(ii) সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়

$x_1=-2/3,\ y_1=5/3$; অথবা, $x_1=-2/7,\ y_1=-15/7$.

অর্থাৎ, দুইটি স্পর্শ বিন্দু আছে, যথা :

$(-2/3, 5/3)$ এবং $(-2/7, -15/7)$

এই মানগুলি $5xx_1+yy_1=5$ এ বসাইয়া ঐ স্পর্শ বিন্দু দুইটিতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল :

$$2x-y+3=0\ ; \qquad 2x+3y+7=0.$$

4. (1, 2) বিন্দু হইতে $x^2+2y^2=6$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. পরাবৃত্ত $x^2-4y^2=12$ এর যে স্পর্শকগুলি (3, 0) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. (5, 6) বিন্দুগামী যে রেখাগুলি $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $3x+4y=25$; $4x-3y=0$. (ii) $y=x+3$; $x+y+1=0$.
(iii) $x+y-2=0$; $x-y-2=0$. (iv) $2x-y-9=0$; $2y+x+3=0$.

2. **স্পর্শক :** (i) $x-y+5=0$. (ii) $x-y-1=0$ (iii) $9x-2\sqrt{5}y=12$.
(iv) $2y-x-3=0$. (v) $2x-y-6=0$. (vi) $3x+y+11=0$
(vii) $3x+2y-2=0$.

অভিলম্ব : (i) $y+x+1=0$. (ii) $y+x=3$. (iii) $18y+4\sqrt{5}x=39\sqrt{5}$.
(iv) $y+2x-14=0$. (v) $2y+x+2=0$. (vi) $x-3y-3=0$
(vii) $2x-3y-10=0$.

4. $y+x-3=0$; $5y-x-9=0$. 5. $x-y=3$; $x+y=3$.

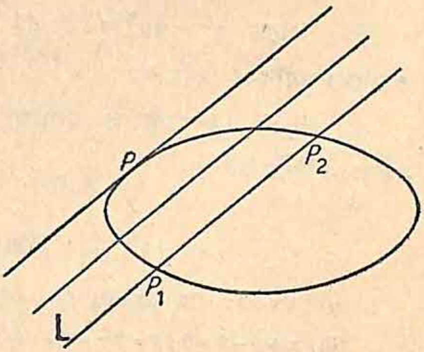
6. $x-y+1=0$; $x-5y+25=0$.

8·4. প্রদত্ত প্রবণতা m-সহ স্পর্শক

প্রাথমিক বীজগণিত হইতে জানা যায় যে সহসমীকরণ হিসাবে x এবং y এর একটি প্রথম-ঘাতের সমীকরণ ও একটি দ্বিতীয়-ঘাতের সমীকরণ যদি সমাধান করা যায়, তাহা হইলে দুই জোড়া সমাধান—ধরা যাক্, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) পাওয়া যায়, যাহারা বাস্তব অথবা জটিল রাশি। দুই মাত্রার বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে একটি প্রথম-ঘাতের সমীকরণ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, এবং একটি দ্বিতীয়-ঘাতের সমীকরণ একটি কনিককে প্রকাশ করে, তা সে প্রকৃত কনিক অথবা অপ্রকৃত কনিক

যাহাই হউক। সুতরাং একটি সরলরেখা একটি কনিককে আদৌ ছেদ না করিতে পারে—ইহা ঘটে যখন যুগ্ম সমাধান (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর উভয়েই জটিল রাশি। কিন্তু যখন কোন সরলরেখা কোন কনিককে ছেদ করে, তখন সাধারণত দুইটি বিন্দুতে এই ছেদ হয়। **যখন এই দুইটি ছেদ-বিন্দু একটিমাত্র বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইতে অগ্রসর হয়, তখন ঐ সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানে উহা কনিকটির স্পর্শক হয়।**

সংজ্ঞা। কোন রেখা L কোন কনিককে ছেদ করিলে যে দুইটি ছেদবিন্দু, P_1 এবং P_2 উৎপন্ন হয় তাহারা যখন কোন একটিমাত্র বিন্দু Pতে পরস্পর মিলিত হইতে অগ্রসর হয় (রেখা Lকে নিজ অবস্থানের সহিত সমান্তরাল-ভাবে P অভিমুখে গতিশীল করার ফলে), তখন L রেখার সীমাস্থ অবস্থানে উহাকে কনিকটির স্পর্শক বলা হয়। (চিত্র 8.2 দ্রষ্টব্য।) ইহা পূর্বে 8·2 (1) অনুচ্ছেদে প্রদত্ত সংজ্ঞারই সাধারণ রূপ।



চিত্র 8.2

এইস্থলে কিন্তু একটি বিষয়ে বিশেষ দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে, যে **কোন রেখা যদি কোন কনিককে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলেই উহাকে কনিকটির স্পর্শক বলা যায় না**, কারণ এইরূপ প্রকৃতির অনেক রেখা আছে, যেমন অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত সমান্তরাল রেখাসমূহ, যাহারা কনিকটির স্পর্শক নহে। ছাত্রছাত্রীরা এখন লক্ষ্য করিবে, নিম্নের প্রশ্নটি সমাধানে উক্ত সংজ্ঞা কতদূর নিষ্ঠার সহিত অনুসরণ করা হইয়াছে।

প্রশ্ন 1. এইরূপ শর্ত নির্ণয় কর যেন প্রদত্ত প্রবণতা m-বিশিষ্ট কোন রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর স্পর্শক হইতে পারে।

এখানে ধরিয়া লওয়া হইল যে স্পর্শকটি বিদ্যমান এবং উহার প্রবণতা m ; ধরা যাক, P স্পর্শবিন্দু এবং স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$র সমীকরণ $y=mx+c$ (এখানে স্মরণ রাখ যে m প্রদত্ত)।

$\overleftrightarrow{PT}$ রেখা উপবৃত্তকে যে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, তাহার স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে নিম্নলিখিত সহসমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, যথা :

$$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \qquad (i)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \qquad (ii)$$

(i) প্রদত্ত y এর মান (ii)এ বসাইয়া,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

বা, $$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\frac{2mc}{b^2}x+\frac{c^2}{b^2}-1=0 \quad \cdots \qquad (iii)$$

$\overleftrightarrow{PT}$ রেখা সম্পর্কে বিশেষ লক্ষণীয় বিষয় হইল এই যে সাধারণ ক্ষেত্রে প্রত্যাশিত ছেদবিন্দু দুইটি এখানে একটিমাত্র বিন্দু P তে পরস্পর মিলিত হইতে যাইতেছে ; অর্থাৎ, দ্বিঘাত সমীকরন (iii) এর বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে, কারণ উহারা উভয়েই সীমাস্থ অবস্থায় P এর ভুজ হইবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ (iii) এর বীজ দুইটি সমান হইবে, যদি সমীকরণটির নিরূপক শূন্য হয় ;

অর্থাৎ, যদি $\frac{4m^2c^2}{b^4}-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)=0$ হয় ;

ইহাকে আরও সরলীকরণের ফলে পাওয়া যায়,

$$c^2=a^2m^2+b^2$$

বা, $$c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \qquad (iv)$$

তাহা হইলে (iv) সম্পর্কটিই হইল $y=mx+c$ এর **স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত**।

সুতরাং যখন প্রবণতা m নির্দিষ্ট বা প্রদত্ত থাকে তখন উপবৃত্তটির দুইটি স্পর্শক :

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \cdots \qquad (v)$$

এবং $$y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \cdots \qquad (vi)$$

(iv) সমীকরণ হইতে প্রদত্ত c এর মান (iii) এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$x^2\left(\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2}\right) \pm \frac{2m\sqrt{a^2m^2+b^2}}{b^2}x + \frac{a^2m^2}{b^2} = 0$$

বা, $$\left(\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2}}x \pm \frac{am}{b}\right)^2 = 0$$

অর্থাৎ, $x = -\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ বা, $+\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$.

$\therefore$ সমীকরণ (i) হইতে y এর অনুরূপ মান দুইটি হইল যথাক্রমে

$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} \text{ এবং } \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

$\therefore$ (v) এবং (vi) নির্দেশিত স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় হইল যথাক্রমে

$$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) \text{ এবং }$$

$$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

বিকল্প পদ্ধতি

ধরা যাক্, $P : (x_1, y_1)$ হইল স্পর্শবিন্দু।

তাহা হইলে উপবৃত্তটির P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \cdots \quad (vii)$$

যদি $y = mx + c$ (যেখানে m প্রদত্ত) রেখা P বিন্দুতে স্পর্শক হয়, তাহা হইলে (vii) সমীকরণ এবং সমীকরণ

$$mx - y = -c \qquad \cdots \quad (viii)$$

একই রেখা নির্দেশ করে, সুতরাং x এবং y এর সহগগুলি অবশ্যই সমানুপাতিক হইবে।

$$\therefore \frac{x_1}{a^2m} = \frac{y_1}{-b^2} = \frac{1}{-c}$$

বা, $x_1 = -\dfrac{a^2m}{c}$, $y_1 = \dfrac{b^2}{c}$.

পুনরায়, যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

বা, $\dfrac{a^4m^2}{a^2c^2}+\dfrac{b^4}{c^2b^2}=1$

বা, $a^2m^2+b^2=c^2$

$\therefore\ c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

ইহাই স্পর্শক হওয়ার শর্ত। স্পর্শবিন্দু দুইটি পূর্বের ন্যায় এখন সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. b^2 এর পরিবর্তে a^2 ধরিয়া, অথবা পূর্বোক্ত পদ্ধতি হুবহু অনুসরণ করিয়া $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে $y=mx+c$ (m প্রদত্ত) রেখা যে শর্তে স্পর্শ করিবে তাহা নির্ণয় করা যায় ; ঐ শর্ত হইল :

$$c=\pm a\sqrt{m^2+1}.$$

এবং তখন স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইবে

$$y=mx+a\sqrt{m^2+1}.\quad \left[\text{স্পর্শবিন্দু}: \left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right]$$

এবং $y=mx-a\sqrt{m^2+1}.\quad \left[\text{স্পর্শবিন্দু}: \left(\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right]$

অনুসিদ্ধান্ত 2. অনুরূপভাবে পরাবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ কে $y=mx+c$ রেখা যে শর্তে স্পর্শ করিবে তাহা হইল

$$c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

স্পর্শক দুইটি হইল

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}\ \left[\text{স্পর্শবিন্দু}: \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)\right]$$

এবং $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}\ \left[\text{স্পর্শবিন্দু}: \left(\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)\right]$

ছাত্রছাত্রীদের পক্ষে অনুসিদ্ধান্ত 1 এবং 2 এর ফলগুলি যাচাই করিয়া দেখা একান্ত আবশ্যক।

প্রশ্ন 2. $y=mx+c$ (m প্রদত্ত) রেখা যে শর্তে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, প্রদত্ত রেখা অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহা P ; P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সমীকরণ দুইটি সমাধান করিতে হইবে :

$$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $y^2=4ax \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) হইতে প্রাপ্ত y এর মান (ii) এ বসাইয়া পাওয়া যায়,,

$$(mx+c)^2=4ax$$

$$\text{বা,}\quad m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0 \cdots (iii)$$

রেখাটি সাধারণ অবস্থায় অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে; কিন্তু যেহেতু উহা স্পর্শক, সুতরাং ছেদবিন্দু দুইটি একটি মাত্র বিন্দু P তে মিলিত হইতে পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইয়াছে ও নিকটবর্তী হইয়াছে। অর্থাৎ রেখাটির সীমাস্থ অবস্থায় দ্বিঘাত সমীকরণে (iii) এর বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে (যেহেতু উহারা উভয়েই P এর ভুজ)। বীজ দুইটি সমান হইবে যদি (iii) এর নিরূপক শূন্য হয়; অর্থাৎ যদি

$$4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$$

$$\text{বা,}\quad \boldsymbol{c=a/m}$$

ইহাই স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

সুতরাং $\boldsymbol{y=mx+\frac{a}{m}}$ সর্বদা (অর্থাৎ m এর যে কোন মানে) অধিবৃত্তটিকে স্পর্শ করে; ইহা সহজেই নির্ণয় করা যায় যে স্পর্শবিন্দুটি হইল

$$\text{অর্থাৎ,}\quad \left(\frac{a}{m^2},\ \frac{2a}{m}\right).$$

বিকল্প পদ্ধতি

ধরা হইল, $y=mx+c$ রেখা অধিবৃত্তটিকে (x', y') বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহা হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি, যথা

$$yy'=2a(x+x')$$

$$\text{এবং}\quad y=mx+c.$$

একই রেখা নির্দেশ করে; সুতরাং উহাদের অনুরূপ সহগগুলি অবশ্যই সমানুপাতিক হইবে।

$$\therefore\quad \frac{y'}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{2ax'}{c}$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad y'=\frac{2a}{m}\ \text{এবং}\ x'=\frac{c}{m}$$

কিন্তু (x', y') বিন্দু অধিবৃত্তস্থ বলিয়া

$$y'^2=4ax'$$

বা, $\frac{4a^2}{m^2}=4a.\frac{c}{m}$

বা, $c=\frac{a}{m}$ (স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত)

অর্থাৎ, m এর যে কোন মানে $y=mx+\frac{a}{m}$ রেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করে। উপরে x' এর মানে $c=a/m$ বসাইলে স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$।

বিকল্প পদ্ধতিটি এই প্রকার প্রশ্ন সমাধানে সাহায্য করিবে, যেমন: **কোন রেখার সমীকরণ প্রদত্ত আছে; এইরূপ শর্ত নির্ণয় করিতে হইবে যেন উহা কোন বক্ররেখার স্পর্শক অথবা অভিলম্ব হইতে পারে।**

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে সরলরেখা $y=mx+c$ অধিবৃত্ত $y^2=4a(x+a)$ কে স্পর্শ করে, যদি $c=am+a/m$ হয়।

2. প্রমাণ কর যে $lx+my+n=0$ সরলরেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে, যদি $ln=am^2$ হয়।

3. প্রমাণ কর যে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়, যথা

$$y=mx-\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}.$$

4. প্রমাণ কর যে $lx+my=n$ রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবে, যদি $a^2/l^2+b^2/m^2=(a^2-b^2)^2/n^2$ হয়।

[ইঙ্গিত: (x', y') বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

বা, $b^2x'y-a^2y'x=(b^2-a^2)x'y'$

এই সমীকরণকে এখন প্রদত্ত সমীকরণ

$$my+lx=n$$

এর সহিত তুলনার দ্বারা (x', y') নির্ণয় কর। ইহার পর (x', y') যে উপবৃত্তস্থ বিন্দু, এই তথ্যটির সাহায্য লও।]

5. (*i*) প্রমাণ কর যে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ কে স্পর্শ করে, যদি $p^2=a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha$ হয়।

(*ii*) অনুরূপ প্রশ্ন : রেখা $lx+my=n$ পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ কে স্পর্শ করিবে, যদি $a^2l^2-b^2m^2=n^2$ হয়।

6. উপরের 5নং প্রশ্নে পরাবৃত্তটির পরিবর্তে যদি উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ লওয়া হয়, তবে দেখাও যে (*i*) এর ক্ষেত্রে শর্তটি হইবে $p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$;

এবং (*ii*) এর ক্ষেত্রে শর্তটি হইবে $a^2l^2+b^2m^2=n^2$.

7. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কর্তৃক $y=mx+c$ রেখার উপর ছিন্ন **জ্যা এর দৈর্ঘ্য** নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :** প্রদত্ত রেখা ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু দুইটি নির্ণয়ের জন্য সমীকরণ দুইটি সমাধান কর। এই বিন্দু দুইটির ভুজদ্বয় x_1 এবং x_2 পাওয়া যায় সমীকরণ

$$m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0,$$

হইতে এবং তখন

$$x_1+x_2=\frac{-2(mc-2a)}{m^2},\ x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}$$

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}=\frac{16a(a-mc)}{m^4}$$

এবং $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$, বিন্দু দুইটির কোটি y_1, y_2 ধরিয়া।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+m^2}(x_1-x_2)$

$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a(a-mc)}\ ]$$

8. প্রমাণ কর (উপরের প্রশ্ন 7 এর অনুরূপ) যে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (অথবা, পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$) কর্তৃক সরলরেখা $y=mx+c$ এর উপর ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য হইল

$$\frac{|\,2ab\,|\ \sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$$

$$\left(\text{অথবা, } \frac{|\,2ab\,|\ \sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a^2m^2-b^2-c^2}}{a^2m^2-b^2}\right)$$

দেখাও যে বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ এর ক্ষেত্রে জ্যাটির দৈর্ঘ্য হইবে

$$2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}.$$

9. (*i*) প্রমাণ কর যে $y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তটিকে $(-c/\sqrt{2},\ c/\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

(*ii*) $x+y=2+\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে কিনা নির্ণয় কর।

(*iii*) এইরূপ শর্ত নির্ণয় কর যেন

(*a*) $3x+4y=k$ রেখা $x^2+y^2=10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে ;

(*b*) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা

$x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

[উঃ (*a*) $k=40$ বা -10 ; (*b*) $p=a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha\pm\sqrt{a^2+b^2\sin^2\alpha}$]

(*iv*) প্রমাণ কর যে $x+y=1$ রেখা অধিবৃত্ত $y=x-x^2$ কে স্পর্শ করে।

(*v*) প্রমাণ কর যে $y=x+\sqrt{7/12}$ রেখা উপবৃত্ত $3x^2+4y^2=1$ কে স্পর্শ করে।

(*vi*) দেখাও যে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে যদি $p=-a\sin\alpha\tan\alpha$ হয়।]

10. (*i*) বৃত্ত $x^2+y^2-6x+4y=12$ এর যে স্পর্শকগুলি $4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-3)^2+(y+2)^2=5^2$$

$4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার আকার হইবে $4x+3y+c=0$ এবং ইহা বৃত্তটির স্পর্শক হইবে, যদি ইহার $(3,-2)$ হইতে দূরত্ব ±5 এর সমান হয়।

$$\therefore\quad \frac{4.3+3.(-2)+c}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm5$$

অর্থাৎ, $c=19$, বা, -31

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক দুইটি হইল $4x+3y+19=0$ বা, $4x+3y-31=0$.]

টীকা। এই পদ্ধতি কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, অন্য কোন কনিকের ক্ষেত্রে নহে।

(*ii*) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের সেই স্পর্শক বা স্পর্শকসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা বা যাহারা

(*a*) $y=mx+c$ রেখার সমান্তরাল ;

(*b*) $y=mx+c$ রেখার উপর লম্ব ;

(*c*) $(b, 0)$ বিন্দুগামী ;

(*d*) অক্ষদ্বয়ের সহিত এইরূপ একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে যাহার ক্ষেত্রফল a^2.

(*iii*) একটি বৃত্ত $(-1, 1)$, $(0, 6)$ এবং $(5, 5)$ বিন্দুগামী। এই বৃত্তের যে বিন্দুসমূহে স্পর্শকগুলি বৃত্তটির কেন্দ্র ও মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমান্তরাল, তাহাদের নির্ণয় কর।

[উঃ (ii) $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$; $my+x=\pm a\sqrt{1+m^2}$; $ax\pm y\sqrt{b^2-a^2}=ab$ $x+y=a\sqrt{2}$ (iii) $(-1, 5)$; $(5, 1)$]

11. (*i*) $2x+y=0$ রেখার সমান্তরাল যে রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক তাহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

(*ii*) উপবৃত্ত $4x^2+3y^2=5$ এর যে স্পর্শকগুলি $y=3x+7$ রেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে স্পর্শকগুলি x অক্ষের সহিত 60° কোণে নত তাহাদের স্পর্শ বিন্দুসমূহ নির্ণয় কর।

(*iii*) পরাবৃত্ত $4x^2-9y^2=1$ এর যে স্পর্শক $4y=5x+7$ রেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উঃ (*i*) $4x+2y+a=0$; $(a/4, -a)$. (*ii*) $y=3x\pm\frac{1}{3}\sqrt{155/3}$ $\left(\pm\frac{3\sqrt{65}}{26}, \pm\frac{2\sqrt{195}}{39}\right)$. (*iii*) $24y-30x=\pm\sqrt{161}$]

8·5. প্রদত্ত একটি বিন্দু দিয়া দুইটি স্পর্শক গমন করে

প্রতিপাদ্য। প্রমাণ করিতে হইবে যে প্রদত্ত একটি বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া সাধারণভাবে কোন কনিকের দুইটি স্পর্শক গমন করে।

উপবৃত্তের ক্ষেত্রে বিষয়টি এখানে আলোচনা করা হইল ; ছাত্রছাত্রীরা অনুরূপ পদ্ধতিতে অপর ক্ষেত্রগুলিতে প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করিতে পারিবে।

উপবৃত্ত : উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \qquad (i)$$

যদি ইহা নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া গমন করে, তবে

$$y_1-mx_1=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

বা, $m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2-b^2)=0 \quad \cdots (ii)$

যদি (x_1, y_1) জানা থাকে, তবে সমীকরণ (ii) m এর দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ হওয়ায় সাধারণভাবে m এর দুইটি মান দিবে—মান দুইটি বাস্তব অথবা কাল্পনিক যাহাই হউক না কেন।

m এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য (i) হইতে এক একটি স্পর্শক পাওয়া যায়।

(ii) সমীকরণে m এর বীজ দুইটি বাস্তব এবং ভিন্ন হয়, যদি

$$(-2x_1y_1)^2-4(x_1^2-a^2)(y_1^2-b^2) \text{ ধনাত্মক হয়,}$$

অর্থাৎ, যদি $b^2x_1^2+a^2y_1^2>a^2b^2$ হয়

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}>1$ হয়।

ইহা ঘটে যখন (x_1, y_1) বিন্দু $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ দ্বারা **আবদ্ধ অঞ্চলের বাহিরে** অবস্থিত হয়।

আবার, বীজ দুইটি সমান হয় যদি

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2=0 \text{ হয়,}$$

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ হয়;

ইহা ঘটে যখন বিন্দু (x_1, y_1) **উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত হয়**।

পুনরায়, বীজদ্বয় কাল্পনিক হয়, যদি

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1 \text{ হয়;}$$

ইহা ঘটে যখন বিন্দু (x_1, y_1), $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর দ্বারা **আবদ্ধ অঞ্চলের** ভিতরে অবস্থিত হয়।

সিদ্ধান্ত 1. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির বাহিরে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দুগামী দুইটি পৃথক স্পর্শক থাকে।

2. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির উপরে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দু দিয়া যাইবে এমন একটি মাত্র স্পর্শক থাকে।

3. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির ভিতরে অবস্থিত হয়, তবে কোন স্পর্শক ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কন করা যায় না।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য

বৃত্ত এমন কি উপবৃত্তের ক্ষেত্রেও ইহা সম্ভবত সহজেই কল্পনা করা যায়, কখন প্রদত্ত বিন্দু **বক্ররেখাটির বাহিরে, উপরে** অথবা **ভিতরে** অবস্থিত হয়।

যেমন, P : (x_1, y_1) যদি প্রদত্ত বিন্দু হয় এবং কোন বৃত্তের কেন্দ্র Cও যদি প্রদত্ত হয়, তবে বলা যায় যে

P বক্ররেখাটির বাহিরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}>$ব্যাসার্ধ হয় ;

P বক্ররেখাটির উপরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}=$ব্যাসার্ধ হয় ;

P বক্ররেখাটির ভিতরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}<$ব্যাসার্ধ হয়।

বিশ্লেষণ-জ্যামিতি অনুসারে, যদি বৃত্তের সমীকরণ হয়

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

তবে P বৃত্তটির ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত হইবে,

যদি যথাক্রমে

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2<,= \text{ অথবা, } >g^2+f^2-c \text{ হয় ;}$$

অর্থাৎ যদি যথাক্রমে

$$x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c<,= \text{ অথবা} >0 \text{ হয়।}$$

বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত এই ধর্মটিকে অপর বক্ররেখাসমূহের ক্ষেত্রেও **সংজ্ঞা** হিসাবে গ্রহণ করা হইবে ঃ সুতরাং

(*i*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) কে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত **বলা হইবে,** যদি যথাক্রমে $y_1{}^2-4ax_1<,=$, অথবা >0 হয়।

(*ii*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) কে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ **(অথবা পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$)** এর ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত **বলা হইবে,** যদি যথাক্রমে

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}-1<,= \text{ বা, } >0 \text{ হয়}$$

$$\left(\text{বা, } \frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}-1<,= \text{ বা, } >0 \text{ হয়} \right)।$$

8·6. পরস্পর লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ

(A) অধিবৃত্ত ঃ $y^2=4ax.$

এই অধিবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=mx+\frac{a}{m}, \text{ যেখানে } m \text{ এর যে কোন মান থাকিতে পারে।}$$

আবার ইহার উপর লম্ব-স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{1}{m}x-am \quad (m \text{ এর পরিবর্তে } -1/m \text{ লিখিয়া })।$$

যদি (h, k) ইহাদের ছেদবিন্দু হয়, তবে

$$k=mh+\frac{a}{m} \text{ এবং } k=\frac{-h}{m}-am,$$

বা, $mh+\frac{a}{m}=-\frac{h}{m}-am$

বা, $h(m+1/m)=-a(m+1/m)$

অর্থাৎ, যদি m অপনয়ন করা হয়, তবে $h=-a$ হয়।

সুতরাং m এর সকল মানের ক্ষেত্রে এক প্রস্থ পরস্পর লম্ব-স্পর্শক এমন একটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে যাহার ভুজ সর্বদা $-a$; ইহার অর্থ, পরস্পর লম্ব-স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$x=-a$ (hএর পরিবর্তে সাধারণ (current) স্থানাঙ্ক x বসাইয়া)।

ইহা অধিবৃত্তটির **নিয়ামকের সমীকরণ**। অর্থাৎ, অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে পরস্পর লম্ব-স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্তের নিয়ামক রেখাটি।

(B) উপবৃত্ত : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

উপবৃত্তটির যে কোন স্পর্শক হইল

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$, যেখানে m যে কোন ধ্রুবক

এবং ইহার উপর লম্ব-স্পর্শক হইল

$$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2} \quad (m \text{ এর পরিবর্তে } -1/m \text{ লিখিয়া })$$

যদি উহারা (h, k) বিন্দুতে ছেদ করে, তবে

$$k=mh+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$mk=-h+\sqrt{a^2+b^2m^2}$$

m অপনয়নের জন্য নিম্নলিখিত পন্থা অবলম্বন করা হইল, যথা :

$$(k-mh)^2+(mk+h)^2=(\sqrt{a^2m^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+b^2m^2})^2$$

বা, $k^2(1+m^2)+h^2(1+m^2)=a^2(1+m^2)+b^2(1+m^2)$

অর্থাৎ, $h^2+k^2=a^2+b^2$

সাধারণ স্থানাঙ্কে (current co-ordinates) পরিবর্তন করিয়া সঞ্চারপথটির নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি হইল একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2+b^2}$ (অর্থাৎ, পরাক্ষ ও উপাক্ষদ্বয়ের দুইটি প্রান্তবিন্দুর সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য)। এই বৃত্তটি **নিয়ামক বৃত্ত (Director circle)** বলিয়া পরিচিত।

(C) পরাবৃত্ত : $x^2/a^2-y^2/b^2=1$; নিয়ামক বৃত্ত হইল $x^2+y^2=a^2-b^2$.

(D) বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$; নিয়ামক বৃত্ত হইল $x^2+y^2=2a^2$.

[এই ক্ষেত্র দুইটিতে নিয়ামক বৃত্ত নির্ণয় পূর্বের অনুরূপ পদ্ধতিতে হইবে ; সেইজন্য ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।]

টীকা। নিম্নের তারকা (*) চিহ্নিত অনুচ্ছেদটি কৌতূহলী ছাত্রছাত্রীদের উদ্দেশ্যে প্রদত্ত হইল।

*8·7. ব্যাসসমূহ

নিম্নলিখিত প্রশ্নটি দিয়া শুরু করা হইল, যথা :

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

পদ্ধতি 1. ধরা যাক্, জ্যাটি $y=mx+c$, যেখানে ইহা প্রদত্ত যে

$$c=y_1-mx_1.$$

জ্যাটি অধিবৃত্তকে যে বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় নিম্নের সমীকরণ হইতে,

$$(mx+c)^2=4ax$$

বা, $m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0$

স্পষ্টত জ্যাটির মধ্য-বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক, যথা :

$$x_1=\frac{x\text{এর বীজ দুইটির সমষ্টি}}{2}=-\frac{(mc-2a)}{m^2}.$$

এখন, $y_1=\dfrac{2a}{m}$, এবং ইহা হইতে $m=\dfrac{2a}{y_1}$.

[$\because$ $y=mx+c$ এবং $y^2=4ax$ এর মধ্যে x অপনয়ন দ্বারা y এর এই দুই ঘাতের সমীকরণ পাওয়া যায় : $my^2-4ay+4ac=0$.

$$\therefore \quad \frac{y\text{এর বীজদ্বয়ের সমষ্টি}}{2}=\frac{2a}{m}\ ]$$

যেহেতু $m=\dfrac{2a}{y_1}$, সুতরাং $c=y_1-mx_1=\dfrac{y_1{}^2-2ax_1}{y_1}$

$\therefore$ জ্যাটির সমীকরণ হইল : $y=\dfrac{2a}{y_1}x+\dfrac{y_1{}^2-2ax_1}{y_1}$

বা, $\boldsymbol{yy_1-2ax=y_1{}^2-2ax_1}$.

পদ্ধতি 2. (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে রেখার নতি-কোণ θ তাহার সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়। যেমন

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r, \qquad \cdots \quad (i)$$

যেখানে r হইল (x_1, y_1) বিন্দু হইতে (x, y) বিন্দুর নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব।

যেখানে রেখা (i) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে ছেদ করে, সেখানে

$$(y_1+r\sin\theta)^2=4a(x_1+r\cos\theta)$$

অর্থাৎ, $r^2\sin^2\theta+2r(y_1\sin\theta-2a\cos\theta)+y_1{}^2-4ax_1=0$,

এবং এই সমীকরণের বীজগুলির মান সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে যদি

$$y_1\sin\theta-2a\cos\theta=0 \text{ হয় ;}$$

$\therefore$ (i) হইতে জ্যা-টির নির্ণেয় সমীকরণ

$y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)=0$. ($\because$ (i)এর সাহায্যে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$কে অপনয়ন করিয়া)

বা, $\boldsymbol{yy_1-2ax=y_1{}^2-2ax_1}$.

টীকা। উপরে প্রদত্ত পদ্ধতি 2 সম্পূর্ণ সাধারণ পদ্ধতি এবং অপর কনিকগুলির ক্ষেত্রেও ইহা প্রয়োগ করা যায়।

ছাত্রছাত্রীদের এখন উচিত হইবে, নিম্নে প্রদত্ত ফলগুলি নিজের চেষ্টায় নির্ণয় করা :

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু (x_1, y_1), তাহার সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}.$$

2. পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর যে জ্যা এর মধ্য বিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}.$$

পরবর্তী প্রশ্নটি হইল :

অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

ধরা যাক্, জ্যাগুলি অক্ষের সহিত যে কোণ করে তাহার ট্যানজেন্ট হইল m; ফলে সমান্তরাল রেখাগুলির সমীকরণ হইবে

$$y=mx+c,$$

যেখানে m নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু c অনির্দিষ্ট (arbitrary) ধ্রুবক। এই সরলরেখা ও অধিবৃত্তটির ছেদবিন্দুর কোটি পাওয়া যাইবে নিম্নের সমীকরণ হইতে, যথা

$$y^2=4a\left(\frac{y-c}{m}\right)$$

$$\text{বা,}\quad my^2-4ay+4ac=0.$$

ধরা হইল, এই সমীকরণের বীজ দুইটি (অর্থাৎ, রেখা অধিবৃত্তকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের কোটি) y_1 এবং y_2 ; তাহা হইলে

$$y_1+y_2=\frac{4a}{m}.$$

ধরা হইল, জ্যা এর মধ্যবিন্দুর কোটি k ; তাহা হইলে

$$k=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}.$$

ইহা c বর্জিত, সুতরাং সমুদয় সমান্তরাল জ্যাগুলির পক্ষে সত্য।

$\therefore$ ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$y=\frac{2a}{m},$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি অধিবৃত্তটির অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা। অতএব নিম্নের প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায়, যথা :

প্রতিপাদ্য। অধিবৃত্তের যে কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

যেহেতু $y=\dfrac{2a}{m}$ রেখা অধিবৃত্তকে $\left(\dfrac{2a}{m}, \dfrac{a}{m^2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে ; এবং এই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল $y=mx+a/m$, সুতরাং প্রতিপাদ্যটির সহিত ইহাও যোগ করা যায় যে :

সঞ্চারপথটি অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুতে স্পর্শকটি প্রদত্ত জ্যাগুলির সহিত সমান্তরাল।

সংজ্ঞা। অধিবৃত্তের কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথকে **ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে অধিবৃত্তটির ব্যাস** বলা হয়। অধিবৃত্তের যে কোন ব্যাস তাহা হইলে উহার অক্ষের সহিত সমান্তরাল।

অনুরূপ পদ্ধতিতে **উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় করা যায়।**

এখানে, প্রদত্ত সমান্তরাল জ্যাগুলির একটিকে লওয়া হইল,

$$y=mx+c,$$

যেখানে ঐ জ্যাগুলির যে কোন একটি সম্পর্কে m নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু c উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রে বিভিন্ন।

ধরা যাক্, জ্যাটির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k)।

এই রেখা ও উপবৃত্তটির ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে যে সমীকরণ হইতে তাহা হইল

$$x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$$

$$\text{সুতরাং}\quad h=\text{মধ্যবিন্দুর } x\text{-স্থানাঙ্ক}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

পুনরায়, (h, k) বিন্দু $y=mx+c$ রেখার উপরও অবস্থিত,

$$\therefore \quad k=mh+c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

এখন (i) ও (ii) এর মধ্যে c অপনয়ন করিলে পাওয়া যায়:

$$h=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}=-\frac{a^2m(k-mh)}{a^2m^2+b^2}$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad b^2h=-a^2mk.$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি হইল এমন একটি সরলরেখা $y=m_1x$, যেখানে

$$m_1=-\frac{b^2}{a^2m}\text{; বা, } mm_1=-\frac{b^2}{a^2}.$$

সংজ্ঞা। উপবৃত্তের কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথকে **ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে উপবৃত্তটির ব্যাস** বলা হয়। **এইরূপ যে কোন ব্যাস স্পষ্টতই উপবৃত্তটির কেন্দ্রগামী।**

আবার, $y=m_1x$ ব্যাস $y=mx$ এর সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, যদি $mm_1=-b^2/a^2$ হয়। প্রতিসমতা ধর্ম বিচার করিয়া ইহাও বলা যায় যে $y=mx$ ব্যাস $y=m_1x$ এর সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে যদি শর্তটি একই হয়, যথা $mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$ হয়।

যেখানে এইরূপ ব্যাস-যুগলের প্রত্যেকে অপরটির সমান্তরাল জ্যাসমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহাদের **অনুবদ্ধ বা প্রতিযোগী ব্যাস (Conjugate diameters)** বলা হয়।

অতএব দুইটি ব্যাস, যথা $y=mx$ এবং $y=m_1x$ পরস্পর প্রতিযোগী হয়, যদি

$$mm_1=-\frac{b^2}{a^2} \text{ হয়।}$$

পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর ক্ষেত্রেও হুবহু অনুরূপ যুক্তি অনুসরণযোগ্য।

পরাবৃত্তটির কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্য-বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ হইল একটি রেখা (ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে ব্যাস বলিয়া কথিত), যাহা পরাবৃত্তটির কেন্দ্রগামী।

$y=mx$ ব্যাসের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল $y=m_1x$ ব্যাস, যেখানে $mm_1=b^2/a^2$।

পরস্পর প্রতিযোগী ব্যাস এর সংজ্ঞা এখন উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞার অনুরূপ হইবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির জ্যাএর মধ্য-বিন্দু প্রদত্ত হইল, উহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $2y^2=3x$; $(2,-1)$. (ii) $3x^2+4y^2=12$; $(-1, 1)$.
(iii) $25x^2-16y^2=400$; $(5, 3)$.

[উঃ (i) $3x+4y=2$. (ii) $3x-4y+7=0$. (iii) $125x-48y=481$.]

2. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে জ্যাগুলি $(c, 0)$ বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের মধ্য-বিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর $x-y-2a=0$ জ্যা $2x-y-5a=0$ জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির যে ব্যাসসমূহ পার্শ্বে প্রদত্ত রেখাগুলির সমান্তরাল রেখাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y^2=2x,\quad 3x+4y+2=0.$ [উঃ $3y+4=0$]

(ii) $x^2+2y^2=1,\quad 2x-3y+1=0$ [উঃ $3x+4y=0$]

(iii) $3x^2+4y^2=2,\quad x+2y-3=0.$ [উঃ $3x-2y=0$]

(iv) $4x^2-3y^2=12,\quad 2x-3y-4=0.$ [উঃ $y-2x=0$]

5. $16x^2-9y^2=4$ পরাবৃত্তের যে ব্যাস $x=2y$ ব্যাসের প্রতিযোগী (conjugate) তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [উঃ $9y-32x=0$]

6. দেখাও যে $y+3x=0$ এবং $4y-x=0$ হইল $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের পরস্পর প্রতিযোগী ব্যাসদ্বয়।

7. প্রমাণ কর যে $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু $(2, -1)$ তাহার সমীকরণ হইল $8x-9y=25$.

8·8. স্থিতি-মাপ বা 'প্যারামিটার'গত রূপ (Parametric Representation)

সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল এমন একটি সম্পর্ক যাহা ঐ সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু অবশ্যই বজায় রাখিয়া চলে। এইরূপ সম্পর্ককে অপর এক প্রকার সুবিধাজনক আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) কে একটি তৃতীয় চলরাশি (ধরা যাক্, t অথবা θ) র মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়, যে ক্ষেত্রে ঐ তৃতীয় চলরাশিটিকে বলা হয় **স্থিতি-মাপ বা 'প্যারামিটার' (parameter)**।

(A) অধিবৃত্ত বিষয়ক

1. $y^2=4ax$ সমীকরণে যদি y এর পরিবর্তে $2at$ ধরা হয়, তবে $x=at^2$ হয় ; সুতরাং $(at^2, 2at)$ বিন্দু t এর যে কোন মানে অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত হইবে এবং বিন্দুটিকে সংক্ষেপে "t-বিন্দু" বলিয়া উল্লেখ করা চলে।

তাহা হইলে লেখা যায়,

$$\left.\begin{aligned} x&=at^2 \\ y&=2at \end{aligned}\right\} ;$$

ইহাদের এই একত্র রূপকেই বলা হয় অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর 'প্যারামিটার'গত রূপ (Parametric representation)। এখন ছাত্রছাত্রীদের নিম্নে প্রদত্ত ফলগুলির সত্যতা যাচাই করিয়া দেখিতে বলা যাইতেছে :

(i) t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$y - 2at_1 = \frac{2}{t_2 + t_1}(x - at_1^2).$$

(ii) যখন t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয় একটিমাত্র বিন্দু t_1 এ পরস্পর মিলিত হওয়ার পথে অগ্রসর হয়, তখন t_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - 2at_1 = \frac{1}{t_1}(x - at_1^2)$$

বা, $t_1 y = x + at_1^2$.

(iii) t_1 এবং t_2 বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়, যথা

$$t_1 y = x + at_1^2$$

এবং $t_2 y = x + at_2^2$

এর ছেদ-বিন্দুটি স্পষ্টত $\{at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)\}$.

(iv) t_1 বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y - 2at_1 = -t_1(x - at_1^2)$$

বা, $y = -t_1 x + 2at_1 + at_1^3$.

এখন $t_1 = -m$ ধরিয়া অভিলম্বের সমীকরণটিকে (অনুচ্ছেদ 8·3 (C) দ্রষ্টব্য ; পৃঃ 174) নিম্নের আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$y = mx - 2am - am^3$$

এবং অভিলম্বটির পাদবিন্দু তখন t_1 $(= -m)$ অর্থাৎ $(am^2, -2am)$.

টীকা । t-এর তাৎপর্য ঃ লক্ষ্য করা যাইতে পারে যে

$1/t$ হইল $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

বা, $-t$ হইল $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা ।

উদা. ঃ বিন্দু t হইল অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর নাভিগামী একটি জ্যা এর একটি প্রান্তবিন্দু ; প্রমাণ কর যে অপর প্রান্তবিন্দুটি $-1/t$-বিন্দু, এবং ইহা হইতে দেখাও যে অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যাগুলির মধ্য-বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ হইল অপর একটি অধিবৃত্ত, যথা : $y^2 = 2a(x - a)$

নাভি $(a, 0)$ এবং বিন্দু $(at^2, 2at)$র যোজক নাভিগামী জ্যা এর প্রবণতা

$$= \frac{2at}{a(t^2 - 1)} = \frac{2t}{t^2 - 1}.$$

যদি অপর প্রান্তবিন্দু $(at_1^2, 2at_1)$ হয়, তবে ঐ একই নাভিগামী জ্যা এর প্রবণতাকে এইভাবে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{2a(t_1-t)}{a(t_1^2-t^2)}=\frac{2}{t_1+t}$$

$$\therefore\ \frac{2t}{t^2-1}=\frac{2}{t_1+t},$$

অর্থাৎ, সরলীকরণ করিয়া পাওয়া যায়, $t_1=-\frac{1}{t}$.

সুতরাং জ্যাটির মধ্যবিন্দুতে

$$2x=at^2+\frac{a}{t^2}$$

এবং $$2y=2at-\frac{2a}{t}$$

সুতরাং $$\frac{y}{a}=t-\frac{1}{t}$$

বা, $$\frac{y^2}{a^2}=t^2+\frac{1}{t^2}-2=\frac{2x}{a}-2.$$

অর্থাৎ, নাভিগামী জ্যাসমূহের মধ্য-বিন্দুগুলির সঞ্চার-পথের সমীকরণ হইল

$$y^2=2a(x-a)$$

অর্থাৎ অপর একটি অধিবৃত্ত।

(B) উপবৃত্ত বিষয়ক

2. বিন্দু $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ θর যে কোন মানে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত। বলা হয় যে

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

একত্রে হইল উপবৃত্তটির 'প্যারামিটার'গত রূপ এবং বিন্দুটিকে θ বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

যদি $\tan\theta/2$ এর পরিবর্তে t লেখা হয়, তবে t এর যে কোন মানে বিন্দু

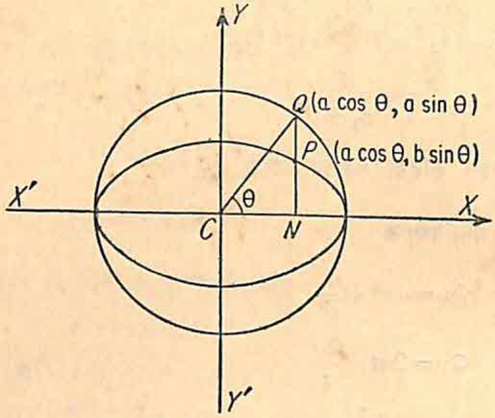
$$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত।

যদি উপবৃত্তস্থ বিন্দু $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ এর কোটি $\overline{NP}$ কে Q পর্যন্ত এইভাবে বর্ধিত করা হয় যে

$$\overline{NQ}:\overline{NP}=a:b$$ হয়,

তবে Q এর স্থানাঙ্ক হইবে $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, **অর্থাৎ** Q হইল $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু। এই বৃত্তকে বলা হয় **সহবৃত্ত (Auxiliary circle)**



চিত্র 8.3

এবং Q এর ভেক্টরিয়াল কোণ (Vectorial angle) θ কে বলা হয় P র **উৎকেন্দ্র কোণ (Eccentric angle)**। নিম্নলিখিত বিষয়গুলি এখন যাচাই করা যাইতে পারে :

(i) যে বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্র কোণ θ এবং ϕ, তাহাদের যোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

(ii) θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1.$$

(iii) θ এবং ϕ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি হইল

$$\left(\frac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}},\quad \frac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right).$$

(iv) θ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2.$$

উদা. : দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে θ বিন্দুর দূরত্ব দুইটি হইল $a(1\pm e\cos\theta)$।

ধরা যাক্ P হইল বিন্দু θ বা ($a\cos\theta, b\sin\theta$), S $(ae, 0)$ এবং S$'(-ae, 0)$ হইল নাভিদ্বয়, যেখানে e উৎকেন্দ্রতা। তাহা হইলে,

$$\begin{aligned}\overline{SP^2} &= (a\cos\theta - ae)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2\cos^2\theta - 2a^2e\cos\theta + a^2e^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2\cos^2\theta - 2a^2e\cos\theta + a^2 - b^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2\cos^2\theta - 2a^2e\cos\theta - b^2\cos^2\theta + a^2 \\ &= a^2e^2\cos^2\theta - 2a^2e\cos\theta + a^2 = a^2(1-e\cos\theta)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{SP} = a(1-e\cos\theta)$; তদ্রূপ $\overline{S'P} = a(1+e\cos\theta)$.

(C) পরাবৃত্ত বিষয়ক

3. বিন্দু $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ θ'র যে কোন মানে পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়, যথা : $\left.\begin{aligned}x &= a\sec\theta \\ y &= b\tan\theta\end{aligned}\right\}$

অথবা, $\left.\begin{aligned}x &= \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \\ y &= b\frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}\right\}$ যদি $t=\tan\theta/2$ হয়,

একত্রে হইল পরাবৃত্তটির 'প্যারামিটার'গত রূপ।

এখন নিম্নলিখিত তথ্যগুলি যাচাই করিয়া দেখা যাইতে পারে, যথা :

(i) θ এবং ϕ এর সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi-\theta}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

(ii) ϕ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\phi=\cos\phi.$$

(iii) ϕ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ তাহা হইলে

$$ax\sin\phi+by=(a^2+b^2)\tan\phi.$$

(D) উপস্পর্শক (Subtangent) এবং উপাভিলম্ব (Subnormal) সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত বিবরণ

কোন বক্ররেখার (বিশেষত কোন কনিক সেক্সনের) যে কোন বন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব যদি অক্ষকে যথাক্রমে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\overline{NP}$ যদি P এর কোটি হয় (চিত্র 8.4 দ্রষ্টব্য), তবে

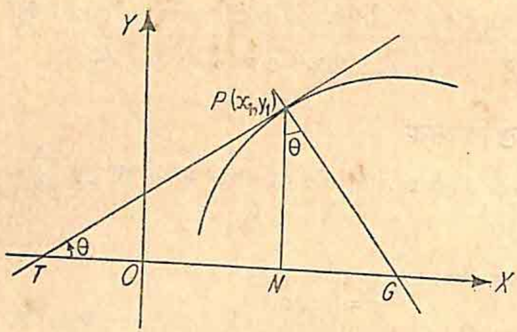
$\overline{PT}$ = P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$\overline{PG}$ = P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের দৈর্ঘ্য

$\overline{NT}$ = x-অক্ষের উপর $\overline{PT}$'র অভিক্ষেপ : ইহাকে P বিন্দুতে **উপ-স্পর্শক** বলা হয়।

$\overline{NG}$ = x-অক্ষের উপর $\overline{PG}$'র অভিক্ষেপ : ইহাকে P বিন্দুতে **উপাভিলম্ব** বলা হয়।

পরস্পরের বিপরীত দিকে উপ-স্পর্শক ও উপাভিলম্বের পরিমাপ করা হয়।



চিত্র 8.4

যদি P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা m হয়, তবে

উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= -\dfrac{y_1}{m}$

উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= y_1 m$.

[$\triangle$PNT হইতে, $\cot\theta = \dfrac{\overline{TN}}{y_1} = -\dfrac{\overline{NT}}{y_1}$

$\triangle$ PNG হইতে, $\tan\theta = \dfrac{\overline{NG}}{y_1}$]

এখন সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় PNT এবং PNG এর সাহায্যে স্পর্শক ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদা. : প্রমাণ কর যে অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর যে কোন বিন্দু P : (x_1, y_1)তে উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= 2 \mid x_1 \mid$ এবং অধিবৃত্তটির সকল বিন্দুতে উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক ও উহা অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের সমান।

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $= 2a/y_1$

$\therefore$ উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \mid -y_1/m \mid = \left|\dfrac{-y_1^2}{2a}\right| = \left|\dfrac{-4ax_1}{2a}\right|$

$= 2 \mid x_1 \mid$

এবং উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= | y_1 m | = \left| y_1 \cdot \frac{2a}{y_1} \right| = 2a$

= যে কোন বিন্দু P এর ক্ষেত্রে ধ্রুবক, কারণ ইহা অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

বিবিধ প্রশ্নমালা

অধিবৃত্ত বিষয়ক

1. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর একটি দ্বিগুণ-কোটির দৈর্ঘ্য $8a$; প্রমাণ কর যে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় এবং শীর্ষের সংযোজক রেখা দুইটি সমকোণে অবস্থিত।

3. P বিন্দু হইতে অঙ্কিত $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত। Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে $y = mx + a/m$ রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক, তা mএর মান যাহাই হউক না কেন। স্পর্শ-বিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

5. $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক অক্ষের সহিত 45° কোণে নত। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

ইহা হইতে $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\overline{PQ}$ জ্যা এর P প্রান্তবিন্দুর কোটি Q এর কোটির দ্বিগুণ। দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $5y^2 = 18ax$ এর উপর অবস্থিত।

8. প্রমাণ কর যে কোন অধিবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলি সবই অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।

9. প্রমাণ কর যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের জ্যা $y = mx + c$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{2a - mc}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

10. অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু P : $(at^2, 2at)$ এবং উহার নাভির যোজক রেখা অধিবৃত্তকে পুনরায় Q $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $t_1 = -1/t$.

11. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক $y+3x=0$ রেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের P : $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বকে $tx+y=at^3+2at$ আকারে প্রকাশ করা যায়। যদি এই অভিলম্ব অধিবৃত্তটির অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং যদি GPকে P অভিমুখে Q পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হয় যে $\overline{GP}=\overline{PQ}$ হয়, তবে দেখাও যে Q এর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্ত $y^2=16a(x+2a)$.

13. বিন্দু $(at^2, 2at)$ হইল $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন জ্যা এর একটি প্রান্তবিন্দু; দেখাও যে জ্যাটির দৈর্ঘ্য হইল $a(t+t^{-1})^2$.

14. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একটি জ্যা $\overline{PQ}$ শীর্ষতে সমকোণ উৎপন্ন করে; দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $y^2=2a(x-4a)$ এর উপর অবস্থিত।

15. কোন বক্ররেখার উপর অবস্থিত একটি গতিশীল বিন্দুর স্থানাঙ্ক এইরূপ, যথা: $x=at-bt^2$, $y=ct$; দেখাও যে বক্ররেখাটি একটি অধিবৃত্ত। উহার শীর্ষ ও নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

16. P, Q, R বিন্দুত্রয় অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর উপর অবস্থিত; $\overrightarrow{PQ}$ নাভিগামী, এবং $\overline{PR}$ অক্ষের উপর লম্ব; দেখাও যে অধিবৃত্তের উপর P এর সঞ্চার এর সঙ্গে সঙ্গে $\overline{QR}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $y^2=2a(x+a)$ এর উপর বিচরণ করে।

17. কোন অধিবৃত্তের P বিন্দুগামী স্পর্শক অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে শীর্ষবিন্দুগামী স্পর্শকটি $\overline{PT}$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

18. শীর্ষ A এবং নাভি S, এইরূপ একটি অধিবৃত্তের উপর P যে কোন বিন্দু; P এবং A গামী স্পর্শকদ্বয় Z বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে

$$\overline{SZ}^2=\overline{SA}.\ \overline{SP}.$$

19. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের নাভিগামী যে কোন জ্যাএর প্রান্তবিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং উহারা নিয়ামকের উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

20. দেখাও যে $y^2=4x$ এই অধিবৃত্তস্থ বিন্দুদ্বয় $(1, 2)$ এবং $(9, -6)$ এর সংযোজক রেখা অধিবৃত্তটির প্রথমোক্ত বিন্দুতে অভিলম্ব।

21. $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তটিকে পুনরায় $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে

$$t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}.$$

[**ইঙ্গিত:** t_1 বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=-t_1$;

t_1 এবং t_2 এর যোজক রেখার প্রবণতা $=\dfrac{2}{t_1+t_2}$.]

22. P এবং Q হইল $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যথাক্রমে $(at_1{}^2, 2at_1)$ এবং $(at_2{}^2, 2at_2)$ বিন্দু ; P এবং Q বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় পরস্পরকে অধিবৃত্তের উপর ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে $t_1t_2=2$.

23. প্রমাণ কর, অধিবৃত্তের যে বিন্দুর কোটি উহার ভুজের সমান, সেই বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব-জ্যা নাভিতে সমকোণ উৎপন্ন করে।

24. PQ হইল কোন অধিবৃত্তের নির্দিষ্ট অভিমুখে অঙ্কিত যে কোন একটি জ্যা। প্রমাণ কর যে P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল একটি সরলরেখা, যাহা নিজেও অধিবৃত্তটির একটি অভিলম্ব।

25. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর কোন নাভিগামী জ্যা এর অংশদ্বয় (segments) যদি l এবং l_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{a}.$$

26. $y^2=8ax$ এই অধিবৃত্তের অক্ষস্থ যে বিন্দুর নাভি হইতে দূরত্ব $8a$, সেই বিন্দু হইতে অঙ্কিত অভিলম্বসমূহের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

27. $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুর ক্ষেত্রে (*i*) অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ ; (*ii*) অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শক এবং উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অন্তরফলের সমান ?

উত্তরমালা

1. $y=x+a$; $x+y+a=0$. 3. $x+1=0$; 5. $(3, 6)$. 11. $9x+3y+2=0$.
15. $\left(\frac{a^2}{4b}, \frac{ac}{2b}\right)$; $\frac{c^2}{b}$. 26. a ; $10a$. 27. $\left(\frac{\sqrt{17}+1}{8}a, \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{17}+2}\right)$; $(3a, 2\sqrt{3}a.)$

উপবৃত্ত বিষয়ক

1. উপবৃত্ত $9x^2+25y^2=225$ এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, মূলবিন্দু হইতে তাহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. $9x^2+16y^2=144$ এই উপবৃত্তের যে স্পর্শক ধনাত্মক x-অক্ষ ও ধনাত্মক y-অক্ষ হইতে সমান ছেদিতাংশ ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $x-y=5$ এই রেখা নিম্নের উপবৃত্তকে স্পর্শ করে :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ এই উপবৃত্তের যে কোন একটি নাভিলম্বের একটি প্রান্তবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে $x+y=3$ এই রেখাটির উপবৃত্ত $3x^2+6y^2=18$ এর স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুটি (2, 1)।

6. যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এই উপবৃত্তের কোন স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্য p এবং p_1 হয়, তবে দেখাও যে $pp_1=b^2$।

7. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তের একটি গতিশীল জ্যা $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু M ; যদি C উপবৃত্তটির কেন্দ্র হয়, তবে দেখাও যে $\overline{CM}$ এবং $\overline{PQ}$ এর প্রবণতা দুইটির গুণফল ধ্রুবক।

[**ইঙ্গিত :** ধর, $P=(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $Q=(a\cos\phi, b\sin\phi)$]

8. দেখাও যে e উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট উপবৃত্ত, $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দুদ্বয় θ ও ϕ একটি নাভিগামী জ্যা এর প্রান্তবিন্দু হইবে যদি

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e-1}{e+1},\text{ বা, }\frac{e+1}{e-1}\text{ হয়।}$$

9. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ চলমান বিন্দুদ্বয় θ ও ϕ এর সংযোজক জ্যা শীর্ষ $(a, 0)$ বিন্দুতে সমকোণ ধারণ করে ; দেখাও যে

$$\tan\theta/2\tan\phi/2=-b^2/a^2.$$

10. যদি P, Q উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু θ, 2θ হয়, তবে দেখাও যে $\overline{PQ}$ জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}-3\right)=\frac{x}{a}.$$

11. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ বিন্দু $(a, 0)$, $(0, b)$ গামী একটি বৃত্ত উপবৃত্তকে পুনরায় P, Q বিন্দুতে ছেদ করে ; দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু $x/a+y/b=0$ এই রেখার উপর অবস্থিত।

12. P, Q হইল উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু θ, ϕ ; TP, TQ হইল স্পর্শক ; T এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে দেখাও যে, যদি P ও Q এইভাবে সঞ্চার করে যে $\theta-\phi=\pi/2$ হয়, তবে T এর সঞ্চারপথ হইবে নিম্নের উপবৃত্ত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

13. উপবৃত্ত $x^2+2y^2=6$ এবং বৃত্ত $2x^2+2y^2=9$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : উপবৃত্তের স্পর্শক, যদি প্রবণতা m হয়

$$y=mx\pm\sqrt{6m^2+3}$$

বৃত্তের স্পর্শক, যেহেতু প্রবণতা m:

$$y=mx\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1+m^2}$$

সর্তানুসারে, ইহারা একই রেখা—কখন ?]

14. S এবং S′ যে উপবৃত্তের নাভি, তাহার উপর অবস্থিত P যে কোন বিন্দু; দেখাও যে $\overline{SP}$ এবং $\overline{S'P}$ উভয়ে P বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর সমভাবে নত। [ধর, উপবৃত্তটি $x^2/a^2+y^2/b^2=1$].

15. উপবৃত্তস্থ বিন্দু P গামী স্পর্শক নিয়ামকের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয়; দেখাও যে $\overline{PT}$ নাভিতে সমকোণ ধারণ করে।

16. P, Q হইল উপবৃত্তস্থ বিন্দু; $\overline{TP}$ এবং $\overline{TQ}$ হইল স্পর্শক; দেখাও যে T এবং $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা উপবৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া গমন করে।

17. উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর নাভিগামী কোন জ্যাএর প্রান্তবিন্দু P ও Q তে $\overline{TP}$ ও $\overline{TQ}$ স্পর্শক; দেখাও যে T নিয়ামকের উপর অবস্থিত।

18. দেখাও যে $lx+my=1$ এই রেখাটির উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবার শর্ত হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=(a^2-b^2)^2.$$

[**অন্যতম পদ্ধতি :** $ax \sec\theta-by \operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2$ এবং $lx+my=1$ হইল অভিন্ন রেখা; সুতরাং x এবং y এর সহগগুলি তুলনা কর।]

19. দেখাও যে (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্বসমূহের পাদবিন্দুগুলি নিম্নের বক্ররেখার উপর অবস্থিত, যথা :

$$(a^2-b^2)xy+b^2y_1x-a^2x_1y=0.$$

[ইঙ্গিত : (α, β) বিন্দুতে অভিলম্ব : $\frac{a^2x}{\alpha}-\frac{b^2y}{\beta}=a^2-b^2$; যদি ইহা (x_1, y_1) বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন করে, তবে $\frac{a^2x_1}{\alpha}-\frac{b^2y_1}{\beta}=a^2-b^2$, অর্থাৎ, (α, β) বিন্দু এই বক্ররেখার উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{a^2x_1}{x}-\frac{b^2y_1}{y}=a^2-b^2,$$ ইত্যাদি।]

20. যে শর্তে $lx+my=1$ এই রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

21. P হইল $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ বিন্দু (x_1, y_1) ; P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে G এর ভুজ হইল e^2x_1, যেখানে e হইল উৎকেন্দ্রতা।

22. দেখাও যে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তের যে জ্যা উপবৃত্তটির $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্ব, তাহার মধ্যবিন্দু এই রেখাটির উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x}{a^3}\cos\theta+\frac{y}{b^3}\sin\theta=0.$$

23. C কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত θ এবং ϕ বিন্দু দুইটি হইল যথাক্রমে P এবং Q ; দেখাও যে $\overline{CA}$ এবং $\overline{CB}$ অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস হইবে, যদি $\theta\sim\phi=\pi/2$ হয়।

24. $\overline{PQ}$ হইল উপবৃত্তের ব্যাস ; দেখাও যে P এবং Q গামী স্পর্শকদ্বয় $\overline{PQ}$ এর অনুবদ্ধ ব্যাসের সহিত সমান্তরাল।

25. $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$ হইল উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস ; $\overline{CQ}$ হইতে P এর দূরত্ব যদি p হয়, তবে দেখাও যে

$$\overline{CQ}=\frac{ab}{p}.$$

26. দেখাও যে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ ব্যাসদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুগামী স্পর্শকসমূহ পরস্পরকে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=2$ এর উপর ছেদ করে।

উত্তরমালা

1. 25/4.   2. $x+y=5.$ 4. $25x-15y=27,$

13. $y=x\pm3,\ y=-x\pm3.$ 20. $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=(a^2-b^2)^2.$

পরাবৃত্ত বিষয়ক

1. পরাবৃত্ত $x^2/4-y^2/2=1$ এবং বৃত্ত $x^2+y^2=1$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে $y=x+\sqrt{5}$ রেখা পরাবৃত্ত $x^2/9-y^2/4=1$ এর স্পর্শক ; যাচাই করিয়া দেখাও যে স্পর্শবিন্দুটি $(-9/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$।

3. পরাবৃত্ত $3x^2-y^2=3$ এর যে স্পর্শকগুলি $2x-y=1$ এই রেখার সহিত সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ এই পরাবৃত্তের $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারে নির্ণয় কর, যথা :

$$ax \tan\theta + by \sec\theta = (a^2+b^2) \sec\theta \tan\theta.$$

5. P $(a \sec\theta, a \tan\theta)$ হইল $x^2 - y^2 = a^2$ এই পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি গতিশীল বিন্দু এবং A $(2a, 0)$ স্থির বিন্দু। দেখাও যে $\overline{AP}$র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অপর একটি পরাবৃত্ত, যথা : $4(x-a)^2 - 4y^2 = a^2$ ।

6. পরাবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P গামী স্পর্শক নিয়ামকের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয় ; দেখাও যে $\overline{PT}$ নাভিতে সমকোণ ধারণ করে।

7. $\overline{NP}$ হইল কোন বিন্দু P এর কোটি, যেখানে P নিম্নের পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

P বিন্দুগামী স্পর্শক তির্যক অক্ষের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয় ; মূলবিন্দু O হইলে দেখাও যে $\overline{ON}.\overline{OT} = a^2$; আরও প্রমাণ কর যে $\overline{ON'}.\overline{OT'} = -b^2$, যদি P বিন্দুগামী স্পর্শকটি অনুবন্ধ অক্ষের সহিত T′ বিন্দুতে মিলিত হয় এবং যদি অনুবন্ধ অক্ষের উপর লম্ব $\overline{PN'}$ ঐ অক্ষের সহিত N′ বিন্দুতে মিলিত হয়।

8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এই পরাবৃত্তের উপর P একটি সঞ্চারমান বিন্দু এবং S নাভি ; P বিন্দুতে $\overline{PT}$ স্পর্শক এবং $\overline{PT}$র উপর $\overline{ST}$ লম্ব ; দেখাও যে Tর সঞ্চারপথ হইল $x^2 + y^2 = a^2$ এই বৃত্ত।

9. P এবং Q হইল যথাক্রমে $(a \sec\theta, b \tan\theta)$, এবং $(-a \operatorname{cosec}\theta, -b \cot\theta)$ বিন্দুদ্বয় ; দেখাও যে P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পরকে নিম্নস্থ পরাবৃত্তের উপর ছেদ করে, যথা :

$$\frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10. $2x^2 - 3y^2 = 6$ এই পরাবৃত্তের যে স্পর্শকসমূহ $x + y - 2 = 0$ এই রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. পরাবৃত্ত $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ এবং বৃত্ত $x^2 + y^2 = 1$ এর সাধারণ স্পর্শকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. P একটি গতিশীল বিন্দু, যাহা নিম্নের পরাবৃত্তটির উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ;$$

P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব অনুবদ্ধ অক্ষের সহিত θ বিন্দুতে মিলিত হয় ; $\overline{QP}$ কে R পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন বর্ধিত অংশ $\overline{QP}$র সমান হয়; দেখাও যে R এর সঞ্চার-পথ হইল এই পরাবৃত্ত, যথা :

$$\frac{x^2}{4a^2}-\frac{b^2y^2}{(a^2-b^2)^2}=1.$$

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্তের উপর P একটি সঞ্চারমান বিন্দু; P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব $\overrightarrow{CX}$ এবং $\overrightarrow{CY}$ অক্ষদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে মিলিত হয় এবং CAQB একটি আয়তক্ষেত্র ; দেখাও যে Q এর সঞ্চারপথ হইল একটি পরাবৃত্ত, যথা :

$$a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

14. দেখাও যে $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এই পরাবৃত্তস্থ $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি পরাবৃত্তটিকে পুনরায় $(a\sec\phi,\ b\tan\phi)$ বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে

$$a^2\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}+b^2\cos\frac{\theta-\phi}{2}=0.$$

15. $\overline{CP}$, $\overline{CD}$ হইল পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস ; দেখাও যে

$$\overline{CP}^2\sim\overline{CD}^2=a^2-b^2.$$

16. যদি কোন পরাবৃত্তের এবং উহার অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e এবং e' হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

[সম-পরাবৃত্ত বিষয়ক সংক্ষিপ্ত বিবরণ (Rectangular or Equilateral hyperbola)

পরাবৃত্তকে সম-পরাবৃত্ত বলা হয় যখন উহার তির্যক ও অনুবদ্ধ অক্ষদ্বয় দৈর্ঘ্যে পরস্পর সমান হয়।

সুতরাং অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্ক-অক্ষ হইলে $x^2-y^2=a^2$ এই সমীকরণ একটি সম-পরাবৃত্তকে নির্দেশ করে।

সম-পরাবৃত্তের সমীকরণের একটি প্রয়োজনীয় আকার হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$xy = \text{ধ্রুবক} = c^2 \text{ (ধরা যাক্)।}$$

এই বিশেষ আকারটি পাওয়া যায়, যদি $x^2 - y^2 = a^2$ এর অসীমপথ দুইটিকে (যথা : $x^2 - y^2 = 0$ বা, $y = \pm x$ কে) স্থানাঙ্ক-অক্ষ ধরা হয় ; তবে পাঠ্যক্রমের বহির্ভূত বলিয়া প্রক্রিয়াটি প্রদর্শিত হইল না, কিন্তু ছাত্রছাত্রীদের এই আকারটি স্মরণ রাখিতে বলা যাইতেছে, যথা :

'প্যারামিটার'গত আকার : t এর যে কোন মানে $x = ct,\ y = c/t$ বক্ররেখা $xy = c^2$ এর উপর অবস্থিত। উহারা একত্রে বক্ররেখাটির 'প্যারামিটার'গত রূপ প্রদান করে। $(ct, c/t)$ বিন্দুকে বিন্দু "t" বলিয়া উল্লেখ করা হয়।]

17. সম-পরাবৃত্ত $xy = c^2$ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে

(*i*) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$c^2x + x_1x_2y = c^2(x_1 + x_2)$$

এবং ইহা হইতে দেখাও যে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ দুইটি হইল যথাক্রমে

$$xy_1 + x_1y = 2c^2 \text{ এবং } xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2.$$

(*ii*) সম-পরাবৃত্তের ('প্যারামিটার'গত রূপের) t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যাএর সমীকরণ হইবে

$$x + t_1t_2y = c(t_1 + t_2) ;$$

এখন দেখাও যে t_1 বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ দুইটি হইল যথাক্রমে

$$x + t_1^2y = 2ct_1,$$

$$\text{এবং } t_1x - \frac{y}{t_1} = \left(t_1^2 - \frac{1}{t_1^2}\right).$$

(*iii*) যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ হইল

$$xy_1 + x_1y = 2x_1y_1$$

(*iv*) m প্রবণতাবিশিষ্ট জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ হইল $y = -mx$.

18. দেখাও যে

$$xy + 2x - y - 6 = 0$$

এই সমীকরণ একটি সম-পরাবৃত্তের সমীকরণ; ইহার অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : সমীকরণটিকে নিম্নের আকারে প্রকাশ কর, যেমন $(x-1)(y+2) = 4$; অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ হইল : $x = 1$ এবং $y = -2$.]

19. নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k) গামী একটি সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিল; দেখাও যে PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল একটি সম-পরাবৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $(h/2, k/2)$।

20. P এবং Q হইল $xy=c^2$ এর উপর অবস্থিত যথাক্রমে t_1 এবং t_2 বিন্দু; TP, TQ হইল স্পর্শক; দেখাও যে মূলবিন্দু ও T এর সংযোজক রেখা PQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

21. $xy=c^2$ পরাবৃত্তের P (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ পরাবৃত্তকে পুনরায় Q (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে; দেখাও যে

$$x_1x_2=-y_1^2\ ;\ y_1y_2=-x_1^2.$$

22. পরাবৃত্ত $xy=c^2$ এর উপর অবস্থিত t_1 এবং t_2 বিন্দু দুইটি হইল যথাক্রমে P ও Q; PQ হইল P বিন্দুতে পরাবৃত্তটির অভিলম্ব; দেখাও যে

$$t_1^3t_2=-1.$$

23. পরাবৃত্ত $xy=c^2$ এর উপর চলমান বিন্দু Pতে অঙ্কিত অভিলম্ব x-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে; দেখাও যে PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$8y^4=c^2(c^2-2xy).$$

উত্তরমালা

1. $y=x+\sqrt{2}\ ;\ y=-x-\sqrt{2}.$

3. $2x-y\pm1=0.$

10. $x+y\pm1=0.$

11. $y=\pm x\pm\sqrt{2},$

পরিশিষ্ট—I

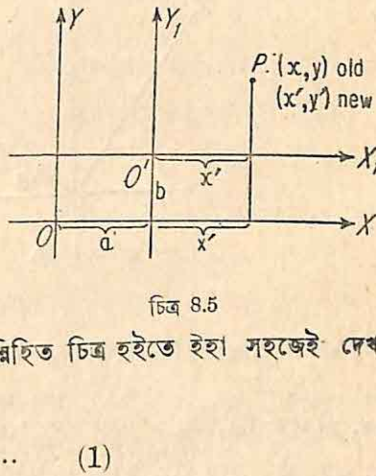
প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত রূপ

(Analytical representation of reflexion, translation and rotation)

স্থানাঙ্কের রূপান্তর (Transformation of co-ordinates)

1. **সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।** কখনও কখনও এইরূপ ঘটে যে প্রদত্ত কোন কার্টেজীয় অক্ষদ্বয়ের স্থান পরিবর্তন বাঞ্ছনীয় হইয়া পড়িতেছে—নূতন অবস্থানের অক্ষদ্বয়কে পূর্বতন অক্ষদ্বয়ের সহিত সমঅভিমুখে রাখিয়া তখন নূতন একটি মূলবিন্দু লওয়া হয়।

ধরা যাক, P সমতলস্থ কোন বিন্দু; এবং পুরাতন অক্ষদ্বয় $(\overleftrightarrow{OX}, \overleftrightarrow{OY})$ সম্পর্কে P এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নূতন অক্ষদ্বয় $(\overleftrightarrow{O'X_1}, \overleftrightarrow{O'Y_1})$ সম্পর্কে উহার স্থানাঙ্ক (x', y') [চিত্র 8.5]। ধরা যাক, নূতন মূলবিন্দু O′ এর পুরাতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে স্থানাঙ্ক হইল (a, b)। তাহা হইলে সন্নিহিত চিত্র হইতে ইহা সহজেই দেখা যায় যে



চিত্র 8.5

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

উদা. ঃ নূতন সমান্তরাল অক্ষ ও নূতন মূলবিন্দু $(2, -1)$ সম্পর্কে $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$ এই বক্ররেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, $x = x' + 2,\ y = y' - 1$

সুতরাং নূতন ব্যবস্থায় বক্ররেখাটির সমীকরণ এইরূপ হইবে, যথা ঃ

$(y' - 1)^2 + 2(y' - 1) - 4(x' + 2) + 9 = 0$

বা, $y'^2 = 4x'$ (অর্থাৎ একটি অধিবৃত্ত যাহার শীর্ষ নূতন মূলবিন্দু)

পুরাতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে শীর্ষটি হইল $(2, -1)$ বিন্দু এবং নাভি $(3, -1)$.

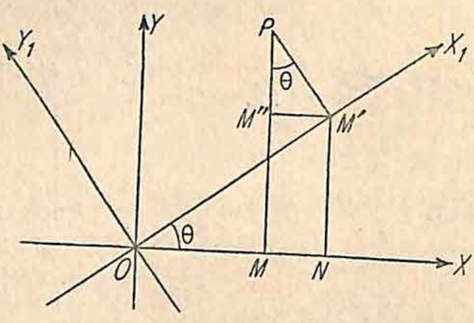
অনুরূপভাবে চেষ্টা কর :

(*i*) $9x^2+4y^2+18x-16y=11$; নূতন মূলবিন্দু $(-1, 2)$ সহ সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।

(*ii*) $x^2-4y^2-6x-32y-59=0$; $(3, -4)$ বিন্দুতে নূতন মূলবিন্দু সহ সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।

2. অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণন

ধরা যাক্, $\overleftrightarrow{OX}$ এবং $\overleftrightarrow{OY}$ একপ্রস্ত প্রাথমিক আয়ত স্থানাঙ্ক অক্ষ। একই মূলবিন্দু O লইয়া এইরূপ অপর আর এক প্রস্থ আয়ত স্থানাঙ্ক অক্ষ $\overleftrightarrow{OX_1}$ এবং $\overleftrightarrow{OY_1}$ লওয়া হইল যেন $\overrightarrow{OX}$ **হইতে** $\overrightarrow{OX_1}$ **পর্যন্ত** কোণটি θ হয়।



চিত্র 8.6

ধরা যাক্, পুরাতন ও নূতন অক্ষ সম্পর্কে যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y')। ধরা যাক্, $\overleftrightarrow{OX}$ এবং $\overleftrightarrow{OX_1}$ এর উপর P র অভিক্ষেপ যথাক্রমে M এবং M' (চিত্র 8.6 দ্রষ্টব্য)।

তাহা হইলে প্রাসঙ্গিক চিত্র হইতে পাওয়া যায় যে

$$x=\overline{OM}=\overline{ON}-\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{M''M'}$$

$$=\overline{OM'}\cos\theta-\overline{M'P}\sin\theta=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

$$y=\overline{MP}=\overline{MM''}+\overline{M''P}=\overline{NM'}+\overline{M''P}$$

$$=\overline{OM'}\sin\theta+\overline{M'P}\cos\theta=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

সুতরাং

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{aligned}\right\}.$$

উদা. ঃ নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে $x^2-y^2=a^2$ এই সমীকরণটিকে রূপান্তরিত কর, যেখানে মূলবিন্দু অপরিবর্তিত আছে এবং x এর ধনাত্মক অক্ষ হইতে x' এর ধনাত্মক অক্ষ পর্যন্ত কোণ -45° করা হইয়াছে।

এখানে $x=x'\cos(-45^\circ)-y'\sin(-45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$

$$y=x'\sin(-45^\circ)+y'\cos(-45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$$

$\therefore$ $x^2-y^2=a^2$ এর রূপান্তরিত আকার হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\tfrac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)-\tfrac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)=a^2$$

বা, $2x'y'=a^2$.

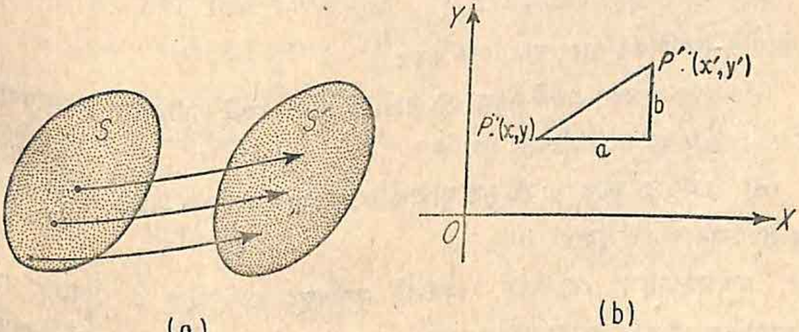
ইহা সম-পরাবৃত্তের সমীকরণ, যখন উহার অসীমপথ দুইটিকে স্থানাঙ্ক অক্ষ ধরা হয়।

অনুরূপ পদ্ধতিতে চেষ্টা কর ঃ

প্রদত্ত সমীকরণ	যে কোণের মধ্য দিয়া পুরাতন অক্ষদ্বয়ের আবর্তন হয়
(i) $x^2-2xy+y^2+2x-4y+3=0$	$+45^\circ$
(ii) $x^2+4xy+y^2+3=0$	$+45^\circ$

সমতলটির রূপান্তর বা পরিবর্তন
(Transformations of the Plane)

1. চলন (Translations) : কোন সামতলিক অঞ্চল S এর চলন বলিতে বুঝায়, S এর এইরূপ সরণ (displacement) যাহাতে S এর প্রত্যেক বিন্দু একটি প্রদত্ত (নির্দিষ্ট) অভিমুখে এক অভিন্ন প্রদত্ত দূরত্বের মধ্য দিয়া স্থানান্তরিত হয়। [চিত্র 8.7(a)]



(a) (b)

চিত্র 8.7

যেমন, একটি জানালা যখন উত্থিত হয়, তখন ঐ জানালা-মধ্যস্থ কোন সামতলিক কাচখণ্ডের চলন ঘটে।

বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত রূপ ঃ ধরা যাক্, P : (x, y) কোন সমতলস্থ একটি অনির্দিষ্ট যে কোন বিন্দু এবং ধরা যাক্, সমতলটির চলনের ফলে P স্থানান্তরিত হইয়া যে বিন্দুতে উপস্থিত হয় তাহা P′ : (x', y') [চিত্র 8.7 (b)]। ধরা যাক্, X-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর দিক-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{PP'}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে a এবং b ; তাহা হইলে

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

নূতন অক্ষদ্বয় পুরাতন অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল ও উহাদের সহিত যথাক্রমে সম-অভিমুখী হইলে স্থানাঙ্কের রূপান্তরঘটিত যে সম্পর্ক পূর্বে প্রাপ্ত হওয়া গিয়াছিল, এই ক্ষেত্রেও ঐ একই সম্পর্কদ্বয় পাওয়া যায় বলিয়া দেখা গেল। কিন্তু উভয় ক্ষেত্রে প্রাপ্ত অনুরূপ ফলগুলির তাৎপর্যগত ব্যাখ্যা পরস্পর হইতে **সম্পূর্ণ ভিন্ন**। পূর্বের ক্ষেত্রে P বিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত ছিল ; তবে নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে উহার নূতন স্থানাঙ্ক ধার্য হইয়াছিল। কিন্তু এক্ষেত্রে অক্ষদ্বয়ের কোন পরিবর্তন হয় নাই ; বিন্দু P এরই অবস্থানের পরিবর্তন হইয়াছে।

উদা. ঃ ধরা যাক্, বক্ররেখা C : $y = x^2 - x + \frac{3}{2}$ চলনের ফলে y এর ঋণাত্মক অক্ষের অভিমুখে $\frac{3}{2}$ একক দূরত্বের মধ্য দিয়া স্থানান্তরিত হইল। নূতন বক্ররেখা C′ এর সমীকরণ কি হইবে ?

এখানে $x' = x$, $y' = y - \frac{3}{2}$ (বা, $y = y' + 3/2$)

∴ নূতন বক্ররেখা C′ এর সমীকরণ হইল

$$y' + \tfrac{3}{2} = x'^2 - x' + \tfrac{3}{2}$$

বা, $y' = x'^2 - x'$.

বিশ্লেষণ-জ্যামিতির সাহায্যে যাচাই কর ঃ

(i) চলনের ফলে একটি সরলরেখা সাধারণভাবে একটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর স্থানান্তরিত হয়। ব্যতিক্রম কি কি ?

(ii) চলনের ফলে একটি বৃত্ত স্থানান্তরিত হইয়া সমব্যাসার্ধবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্তের উপর সমাপতিত হয়।

2. **ঘূর্ণনসমূহ।** ধরা যাক্, সমতলটি মূলবিন্দুর চারিদিকে θ কোণের মধ্য দিয়া আবর্তিত হইল। তাহা হইলে কোন প্রদত্ত বিন্দু P : (x, y) যে P′ বিন্দুতে

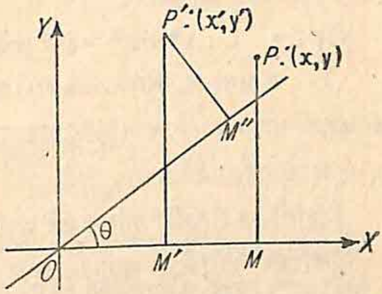
স্থানান্তরিত হইবে তাহার (x', y') স্থানাঙ্ক কিভাবে পূর্ব স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y) ও θ'র সহিত সম্পর্কযুক্ত হইবে ?

অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের (বা আবর্তনের) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সূত্রের ন্যায় অনুরূপ সূত্র এস্থলেও নিরূপণ করা যায় (চিত্র 8.8 দ্রষ্টব্য), যথা :

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$
$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$

বা, x, y নির্ণয়ের জন্য সমাধান দ্বারা ইহাও পাওয়া যায় যে

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right\}.$$



চিত্র 8.8

উদা. : নিম্নলিখিত সমীকরণটির উপর ঘূর্ণনের ফল বিচার কর :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

উপরের সূত্র অনুসারে x এবং y এর পরিবর্তে উহাদের মান বসাইলে ইহা পাওয়া যায় যে

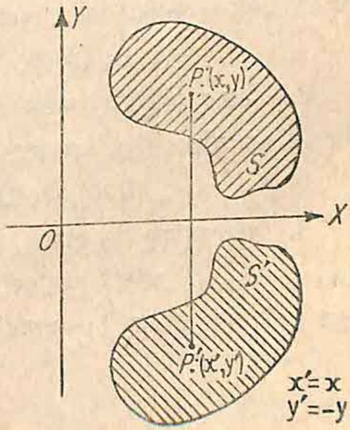
$$(x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 + (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = a^2$$
$$\text{বা,}\quad x'^2 + y'^2 = a^2.$$

অর্থাৎ, যে বৃত্ত প্রাপ্ত হওয়ার কথা, ইহা তাহাই ($\because$ সমতলের এইরূপ ঘূর্ণনের ফলে স্থানান্তরিত একটি বৃত্ত উহার হুবহু অনুরূপ বৃত্তের উপর সমাপতিত হয়)।

উদা. : মূলবিন্দুর চারিদিকে অধিবৃত্ত $y^2 = 2mx$ কে $-90°$'র মধ্য দিয়া আবর্তিত কর।

3. অক্ষদ্বয়ের উপর প্রতিফলন

ধরা যাক্, সমতলটি x-অক্ষে প্রতিফলিত হইল ; প্রকারান্তরে বলা যায় যে উহা x-অক্ষের চারিদিকে 180° কোণের মধ্য দিয়া আবর্তিত হইল বলিয়া ধরা হইল। ধরা যাক্, P : (x, y) যে কোন একটি বিন্দু এবং P′ : (x', y') হইল সেই বিন্দু যাহার উপর P স্থানান্তরিত হইল।



চিত্র 8.9

তাহা হইলে স্পষ্টত

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপে, y-অক্ষে প্রতিফলন নিম্নে প্রদত্ত সূত্রের সাহায্যে প্রকাশিত হয়, যথা :

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

যে কোন একটি অক্ষে কোন বক্ররেখার প্রতিসম থাকিবার সর্তটি এই রূপান্তরগুলি হইতে সঙ্গে সঙ্গে প্রাপ্তব্য।

উদা. : C : $y^4+x^2=2y^2+x^3$.

(1) রূপান্তরের ফলে C এর সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে ; সুতরাং C, x-অক্ষে প্রতিসম থাকে। কিন্তু (2) রূপান্তরের ফলে সমীকরণটি পরিবর্তিত হয়, সুতরাং C, y-অক্ষে প্রতিসম হয় না।

নিম্নলিখিত উক্তিটির সহিত এই সংক্ষিপ্ত বিবরণ শেষ করা হইল, যথা :

মূলবিন্দুর চতুর্দিকে সাধারণ ঘূর্ণন ও পরে সাধারণ চলন সম্মিলিতভাবে সাধারণ **দৃঢ় গতি (rigid motion)** বলিয়া পরিচিত।

এইরূপ রূপান্তরের (transformation) সমীকরণ দুইটি হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{aligned}\right\}.$$

আরও অগ্রবর্তী অবস্থায় এইরূপ রূপান্তর জ্যামিতি (Transformation Geometry)র সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচয় ঘটিবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির নূতন স্থানাঙ্ক কি হইবে তাহা নির্ণয় কর, যদি অক্ষদ্বয়কে $+45^\circ$ কোণে (মূলবিন্দু স্থির রাখিয়া) আবর্তিত করা হয় :

$$(2, 0), (3, 1), (-2, 4) \text{ এবং } (-5, -8).$$

2. নিম্নের বিন্দুগুলির নূতন স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যদি অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু (2, 1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া অক্ষদ্বয়কে $+45^\circ$ কোণে আবর্তিত করা হয় :

$$(0, 0), (1, 2), (-3, 4), (-2, -5).$$

3. যদি মূলবিন্দু স্থির রাখিয়া θ কোণে অক্ষদ্বয় আবর্তিত করা হয় তাহা হইলে $(x_1y_2-x_2y_1)$ রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে [(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) ঘূর্ণনের পূর্বে দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক]। ইহার জ্যামিতিক তাৎপর্য কি ?

পরিশিষ্ট—II

ছক (Determinant)

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি, যথা :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\} \text{এর}$$

সমাধান হিসাবে এইরূপ লেখা যায় যে

$$\frac{x}{c_1b_2-c_2b_1}=\frac{y}{a_1c_2-a_2c_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad (i)$$

যদি $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$ হয়।

$a_1b_2-a_2b_1$, এই প্রকার রাশিকে নির্দেশ করিতে **ছক (Determinant)** বলিয়া কথিত নিম্নে প্রদত্ত প্রতীক ব্যবহার করা প্রায়ই সুবিধাজনক হইয়া থাকে, যথা :

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এইভাবে দুইটি সারি, যথা : $(a_1\ b_1)$ এবং $(a_2\ b_2)$ এবং দুইটি স্তম্ভ, যথা :

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \quad \text{এবং} \quad \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

লইয়া a_1, a_2, b_1, b_2 এই রাশি চারিটির বর্গাকারে সজ্জা (arrangement)কে **দ্বিতীয় ক্রমের ছক** (a determinant of the second order) বলা হয়। এবং $a_1b_2-a_2b_1$ হইল এই ছকের মান।

(i) সমাধান এখন তাহা হইলে এইভাবে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{x}{-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

উদা. : যাচাই কর :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-4\,; \quad \begin{vmatrix} 19 & 39 \\ 23 & 48 \end{vmatrix}=15\cdot$$

$$\begin{vmatrix} x+y & x+2y \\ x-y & x-2y \end{vmatrix}=-2xy.$$

2. $a_1x+b_1y+c_1=0,\ \ a_2x+b_2y+c_2=0,\ \ a_3x+b_3y+c_3=0$ এই সমীকরণ তিনটির x এবং y এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হওয়ার শর্তটি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়, যথা :

শেষের দুইটি সমীকরণ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

যদি $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ হয়।

যদি $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ হয়, তবে সমীকরণ দুইটি সমঞ্জস (consistent) হয় না, যদি না

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} \text{ হয়}$$

এবং সেক্ষেত্রে সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইয়া যায়।

এখন x এবং y এর মান প্রথম সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, যদি

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়};$$

এবং ইহা নিম্নপ্রকারে লিখিত হইয়া থাকে, যেমন

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

উপরে প্রদর্শিত তিনটি সারি এবং তিনটি স্তম্ভ লইয়া a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 ; c_1, c_2, c_3 এই নয়টি রাশির এইরূপ বর্গাকারে সজ্জাকে **তৃতীয় ক্রমের ছক (determinant of third order)** বলা হয়, এবং ইহার মানকে নিম্নপ্রকারে প্রকাশ করা যাইতে পারে, যথা :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

এইরূপ বিস্তৃতিকে বুঝাইতে এই পুস্তকে প্রায়ই ছক-প্রতীক ব্যবহার করা হইয়াছে : **প্রসঙ্গত লক্ষ্য করা যায় যে উপরে প্রদত্ত রেখা তিনটি সমবিন্দু হয় যদি উহাদের সহগগুলির ছক শূন্য হয়।**

উদা. : উভয় পক্ষের সমতা যাচাই কর :

$$(i) \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -18\,;$$

(ii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$

(iii) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = 4abc.$

(iv) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

উদা. : kর মান কত হইলে $kx+2y+3z=0$, $2x-3y+4z=0$, $5x+7y-8z=0$, এই সমীকরণ তিনটি যুগপৎ সত্য হইতে পারে ? [উঃ $k=39\frac{3}{4}$]

1978

MATHEMATICS

(First Paper)

Time—Three Hours *Full Marks—90*

Special credit will be given for answers which are brief and to the point.

Figures in the margin indicate full marks for the questions.

প্রতি বিভাগ হইতে **তিনটি** করিয়া প্রশ্ন লইয়া মোট **নয়টি** প্রশ্নের উত্তর কর।

Group A

1\. (a) যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, x^2-y^2 ধ্রুবক। 2

(b) যদি x, y এর সহিত সরল ভেদে এবং y, z এর সহিত বিপরীত অর্থাৎ ব্যস্ত ভেদে থাকে, তাহা হইলে নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য? যুক্তি দিয়া লিখ। 2

(i) x, z এর সহিত সরলভেদে থাকে;

(ii) x, z এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকে।

(c) (i) যদি α এবং β $x(x-3)=4$ এর দুইটি বীজ হয়, তাহা হইলে $\alpha^2+\beta^2$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর। 2

(ii) যদি $2x^2-5x+k=0$ এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয়, তবে k এর মান বাহির কর। 4

2\. (a) একটি শ্রেণী সমান্তর প্রগতিতে আছে। উহার প্রতি পদকে তিনগুণ করিয়া যে নূতন শ্রেণী হইবে তাহাও কি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে? যুক্তি সহ উত্তর দাও। 2

(b) একটি সমান্তর শ্রেণীর 12-তম পদ -13 এবং প্রথম চারটি পদের যোগফল 24 হইলে উহার প্রথম 10টি পদের যোগফল বাহির কর। 6

(c) $A+iB$ (A ও B বাস্তব সংখ্যা) এই আকারে প্রকাশ কর: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$. 2

3\. (a) People এই শব্দটির অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ পাওয়া যাইবে, যাহাদের মধ্যে দুটি P পাশাপাশি থাকিবে না? 6

(b) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ এই সূত্রটি প্রমাণ কর। 2

(c) বর্গমূল নির্ণয় কর: $5+2\sqrt{6}$. 2

4. (a) ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে "দ্বিপদ উপপাদ্যের" উক্তি লিখ। 2

(b) $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যে সাধারণ পদটি লিখ। 2
(n অখণ্ড ধনাত্মক রাশি)

(c) $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। 6

5. (a) e^x এর শ্রেণী বিবেচনা করিয়া প্রমাণ কর :
$z=1+\log_e z+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 2}\right)^2+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 3}\right)^3+\cdots\infty$ পর্যন্ত। 2

(b) যদি $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\infty$ হয়, তাহা হইলে প্রয়োজনীয় সর্তে, যাহা তোমাকে বলিতে হইবে, প্রমাণ কর : 2
$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\infty$।

(c) বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা লগ্নী করিয়া 18 বৎসরে সুদে মূলে মোট 10,000 টাকা পাওয়া যাইবে? 6
[প্রদত্ত : $\log 10{\cdot}4=1{\cdot}0170333$,
$\log 4936{\cdot}29=3{\cdot}6934006$.]

Group B

6. (a) দেখাও যে : $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 6

b) একটি ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণকে দুই ভাগে ভাগ করা হইয়াছে যাহাদের tangents হইতেছে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$. মূল কোণটি কত বাহির কর। 2

(c) প্রমাণ কর : $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$ 2

7. (a) $\tan 2A$ কে $\tan A$ র সাপেক্ষে প্রকাশ কর। 2

(b) যদি $\tan x=\frac{b}{a}$ হয়, তাহা হইলে $a\cos 2x+b\sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর। 6

(c) $\sin 30^\circ$ এর মান হইতে $\sin 15^\circ$ এর মান নির্ণয় কর। 2

8. (a) প্রমাণ কর : $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 2

(b) সাধারণ মান বাহির কর : $\sin 2\theta=\cos\theta$. 2

(c) কোন ত্রিভুজে $(a^2+b^2)\sin(A-B)$
$=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হইলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী। 6

9. (a) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ এর ক্ষেত্রে $\cos 2\theta$ র লেখ অঙ্কন কর।
যখন $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$, তখন ঐ লেখ হইতে θ নির্ণয় কর। 6

(b) নিম্নলিখিত উক্তিটি কি সত্য হইতে পারে? যুক্তি দিয়া লিখ। 2
$3x+4=6-5 \tan 2x$ সমীকরণটির একটি সমাধান $x=\frac{\pi}{4}$.

(c) $x=-\frac{\pi}{2}$ এবং $x=0$ র মধ্যে $\sin x - \cos\ x = 0$ সমীকরণটির কোন সমাধান পাওয়া কি সম্ভব? যুক্তি দিয়া লিখ। 2

10. (a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 50, 36 এবং 28 ; বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। 6
প্রদত্ত $\log 19 = 1{\cdot}2787536$, $\log 29 = 1{\cdot}4623980$.
$L \tan 51°0' = 10{\cdot}0916308$, $L \tan 51°1' = 10{\cdot}0918891$.

(b) কোন ত্রিভুজে নিম্নলিখিত ফলটি কি শুদ্ধ? 2
$a = b \cos C - c \cos B$.
যদি শুদ্ধ না হয়, তাহা হইলে শুদ্ধ ফলটি কি?

(c) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত $\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$ ত্রিভুজটির কোণগুলির সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। 2

Group C

11. (a) OX ও OY কোন লম্ব-কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। আবার O এবং OX কোন মেরু স্থানাঙ্কের যথাক্রমে মূল বিন্দু ও মূল রেখা।

(i) যদি P বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক $(2, 30°)$ হয়, তবে উহার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 1

(ii) যদি P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ হয়, তবে উহার মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 1

(iii) কোন সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $y = x \tan \alpha$ হইলে উহার মেরু-সমীকরণ নির্ণয় কর। 3

(b) A ও B দুইটি বিন্দু যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 3)$ ও $(2, 4)$; P বিন্দু এমনভাবে চলমান যে $PA : PB = 3 : 2$; P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ইহা কিরূপ বক্ররেখা নির্দেশ করে? 5

12. (a) $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও $y=-\frac{5}{8}x$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(b) $3x-4y-5=0$ ও $4x+3y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি? 5+1

13\. (a) পরীক্ষা করিয়া দেখাও যে, $x^2+y^2-x-4y+7=0$ সমীকরণটি কোন বৃত্তকে বুঝায় কিনা। 2

(b) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি ঠিক এবং কেন? "(2, 1) বিন্দুটি $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ বৃত্তের (i) উপরে ; (ii) ভিতরে ; (iii) বাহিরে অবস্থিত।" 6

(c) প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4=0$ এবং $2x^2+2y^2-11=0$ বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়। 2

14\. (a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত (3, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 5

(b) $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) কত? (3, 0) বিন্দুতে এই পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2+3

15\. (a) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য? 2

"কোন অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরল রেখা ইহাকে

(i) একটি মাত্র বিন্দুতে, (ii) দুইটি বিন্দুতে I6

(iii) দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করে।"

(b) (1, 2) বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(c) $2x+3y=1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক। অধিবৃত্তটির নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 6

উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষার প্রশ্নাবলী (1979)

(পশ্চিমবঙ্গ শিক্ষা-সংসদ)

(যে কোন **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাও।)

1. (a) যদি A = (1, 5) এবং B = (− 4, 7) হয়, তাহা হইলে P বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা AB কে 2 : 3 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে। 2

(b) স্থানাঙ্ক জ্যামিতির নিয়মে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিয়া প্রাপ্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চারিগুণ। 5

(c) যদি তিনটি বিন্দু (a, b), $(a+k\cos\alpha, b+k\sin\alpha)$ এবং $(a+k\cos\beta, b+k\sin\beta)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত ফলগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য এবং কেন ? 3

(i) $\left|\alpha-\beta\right|=\dfrac{\pi}{4}$;

(ii) $\left|\alpha-\beta\right|=\dfrac{\pi}{2}$;

(iii) $\left|\alpha-\beta\right|=\dfrac{\pi}{6}$;

(iv) $\left|\alpha-\beta\right|=\dfrac{\pi}{3}$.

2. (a) $x-y+4=0$, $2x+3y-6=0$, $8x+7y-26=0$, এই সরলরেখাগুলি একবিন্দুগামী কিনা তাহা পরীক্ষা কর। 3

(b) $y=mx$ এবং $y=m'x$, এই সমীকরণ বিশিষ্ট সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণের পরিমাপের সূত্র নির্ণয় কর। ইহা হইতে সরলরেখাদ্বয়ের পরস্পর লম্ব হইবার সর্ত বাহির কর। 4

(c) একটি সরলরেখা (α, β) এই নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। প্রমাণ কর যে ঐ সরলরেখার যে অংশ অক্ষদ্বয়ের অন্তর্বর্তী, তাহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ 3

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}=2$$

3. (a) (1, 3), (2, −1) এবং (−1, 1) এই তিনটি বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

(b) $x^2+y^2-6x+4y-7=0$ বৃত্তের যে স্পর্শক $2x-y+3=0$ সরলরেখার উপর লম্ব, তাহা নির্ণয় কর। 4

(c) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার কোন স্পর্শক টানা সম্ভব কি? যুক্তি দাও। 2

4. (a) $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক x অক্ষের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহা নির্ণয় কর। 3

(b) $y^2=2ax$ অধিবৃত্ত $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। ইহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(c) প্রমাণ কর যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভি হইতে ইহার কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক। 3

5. (a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্ত (5, 0) এবং $(-7, \frac{2}{5})$ বিন্দুগামী। a এবং b র মান নির্ণয় কর। 2

(b) যে উপবৃত্তের উপাক্ষের দৈর্ঘ্য উহার নাভিদ্বয়ের মধ্যের দূরত্বের সমান, তাহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। 6

(c) একটি 'কণিকের' উপরিস্থিত একটি বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য, নাভি হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক—ইহা প্রদত্ত। নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য এবং কেন? 2

(i) 'কণিকটি' একটি অধিবৃত্ত;

(ii) 'কণিকটি' একটি উপবৃত্ত;

(iii) 'কণিকটি' একটি পরাবৃত্ত;

(iv) এইরূপ কোন 'কণিক' থাকা সম্ভব নহে।